समीकरण-मीमांसा

दूसरा भाग

लेखक

स्वर्गवासी पं० सुधाकर द्विवेदी

सम्पादक

पद्माकर द्विवेदी

प्रकाशक

विज्ञान परिषत्, प्रयाग ।

श्री जानकीवल्लभो विजयते

समीकरण-मीमांसा

दूसरा भाग

जयति जगति रामः सर्वदा सत्यकामः
सकलवपुषि जीवः शोभते योऽप्यजीवः ।
तमिह हृदि निधाय स्वच्छयुक्तिं विधाय
वदति विविधभेदान् वीजजातानखेदान् ॥

१६—लुप्तीकरण

२०४—न ध्रुव शक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हुई हो जिनमें न अव्यक्त हों अथवा न अध्रुवशक्तिक समीकरणों की परम्परा दी हो जहां न − १ अव्यक्त हों तो उनके परस्पर मिलाने से जो एक समीकरण प्र=० ऐसा उत्पन्न हो जो समीकरणों के पदों के गुणकों के अकरणीगत और अभिन्नफल के रूप में है तो प्र को समीकरणों का प्रत्युत्पन्न कहते हैं। जैसे यदि

$$अय^2 + २कय + ख = ०,$$

$$अ'य^2 + २क'य + ख' = ०$$

दिए हुए ऐसे दो समीकरण हों जहां दोनों में य एक ही है तो दोनों पर से य के मान ले आने से और उनको परस्पर समान करने से

$$-\frac{\text{क}}{\text{अ}}+\frac{\sqrt{\text{क}^{2}-\text{अख}}}{\text{अ}}=-\frac{\text{क}'}{\text{अ}'}+\frac{\sqrt{\text{क}'^{2}-\text{अ}'\text{ख}'}}{\text{अ}'}$$

अअ′ से गुण कर समशोधन से

$$\text{अक}'-\text{अ}'\text{क}=\text{अ}\sqrt{\text{क}'^{2}-\text{अ}'\text{ख}'}-\text{अ}'\sqrt{\text{क}^{2}-\text{अख}}$$

वर्ग करने से

$$\text{अ}^{2}\text{क}'^{2}+\text{अ}'^{2}\text{क}^{2}\,\text{अअ}'\text{कक}'$$

$$=\text{अ}^{2}\text{क}'^{2}-\text{अ}^{2}\text{अ}'\text{ख}'+\text{अ}'^{2}\text{क}^{2}\text{-}\text{अ}'^{2}\text{कख}$$

$$-2\text{अअ}'\sqrt{\text{क}'^{2}-\text{अ}'\text{ख}'}\sqrt{\text{क}^{2}-\text{अख}}$$

समशोधन और अअ′ के अपवर्त्तन से

$$\text{अख}'+\text{अ}'\text{ख}-2\text{कक}'$$

$$=-2\sqrt{\text{क}'^{2}-\text{अ}'\text{ख}'}\sqrt{\text{क}^{2}-\text{अख}}$$

वर्ग कर एक ओर ले जाने से

$$4(\text{क}^{2}-\text{अख})(\text{क}'^{2}-\text{अ}'\text{ख}')-(\text{अख}'+\text{अ}'\text{ख}-2\text{कक}')^{2}=0=\text{प्र}$$

यह दिए हुए दोनों समीकरणों का प्रत्युत्पन्न हुआ। यहां तो समीकरणों से अव्यक्तमान जान कर तब प्र का मान निकाला गया है। अब ऐसी साधारण क्रिया दिखलाते हैं जिससे बिना अव्यक्तमान निकाले प्रत्युत्पन्न का मान आवे।

२०५—तद्रूपफलों से लुप्तीकरण—कल्पना करो कि एक म घात और दूसरा न घात का समीकरण

$$फ(य) = प_० य^म + प_१ य^{म-१} + प_२ य^{म-२} + प_३ य^{म-३} + \cdots + प_म = ०$$

$$फा(य) = ब_० य^न + ब_१ य^{न-१} + ब_२ य^{न-२} + \cdots + ब_न = ०$$

यह दिया हुआ है। इनमें वह स्थिति जाननी है जब कि अव्यक्त का एक मान दोनों में एक ही है। इसके लिये मान लो कि $फ(य)=०$। इसमें य के मान क्रम से $अ_१$, $अ_२$, $अ_३ \cdots\cdots अ_म$ हैं तो इनका उत्थापन दूसरे में देने से निश्चय है कि

$$फा(अ_१),\ फा(अ_२),\ फा(अ_३), \cdots\cdots फा(अ_म)$$

इनमें कोई न कोई मान अवश्य शून्य के तुल्य होगा अर्थात्

$$फा(अ_१),\ फा(अ_२),\ फा(३) \cdots\cdots फा(अ_म)$$

यह अवश्य शून्य के तुल्य होगा क्योंकि $अ_१$, $अ_२$, इत्यादि में से कोई न कोई एक संख्या ऐसी होगी जिसके उत्थापन से $फा(य)=०$ यह स्थिति सत्य होगी अन्यथा दोनों समीकरण में एक मान का होना कैसे संभव है। अब $फा(अ_१)$, $फा(अ_२)$, $फा(अ_३) \cdots\cdots फा(अ_म)$ इसका रूप अकरणीगत अभिन्न जो कि सर्वथा संभव है, क्योंकि यह $फ(य)=०$ इसके मानों का एक तद्रूपफल है, बनाने से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

यदि $फा(य)=०$ इसमें अव्यक्त मान $क_१$, $क_२$, $क_३ \cdots\cdots क_न$ हों तो

$$फा(य) = ब_०(य - क_१)(य - क_२) \cdots\cdots (य - क_न) = ०$$

इनमें य के स्थान में $अ_१$, $अ_२ \cdots\cdots अ_म$ के उत्थापन से

$$फा(अ_१) = ब_०(अ_१ - क_१)(अ_१ - क_२) \cdots\cdots (अ_१ - क_न)$$

$$फा(अ_2)=ब_0\ (अ_2-क_1)\ (अ-क_2)\cdots\cdots(अ_2-क_न)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$फा(अ_म)=ब_0\ (अ_म-क_1)\ (अ_म-क_2)\cdots\cdots(अ_म-क_न)$$

प्रत्येक गुण खण्ड का चिन्ह बदल कर परस्पर गुण देने से और गुणनफल में $(क_1-अ_1)\ (क_1-अ_2)\cdots\cdots(क_1-अ_न)$ इत्यादि के स्थानों में

$$\{\ फ(य)=0=प_0(य-अ_1)(य-अ_2)\cdots\cdots(य-अ_म)$$

$$फ(क_1)=प_0(क_1-अ_1)\ (क_1-अ_2)\cdots\cdots(क_1-अ_म)\ \}$$

$\dfrac{फ(क_1)}{प_0}$ इत्यादि का उत्थापन देने से

$$प_0^न\ फा(अ_1)फा(अ_2)\cdots\cdots फा(अ_म)$$

$$=(-1)^{मन}ब_0^म फ(क_1)फ(क_2)\cdots\cdots फ(क_न)$$

इसलिये कह सकते हैं कि

$$प्र=(-1)^{मन}ब_0^म\ फ(क_1)\ फ(क_2)\cdots\cdots\cdots\cdots फ(क_न)$$

$$=प_0^न\ फा\ (अ_1)\ फा\ (अ_2)\cdots\cdots\cdots\cdots फा(अ_म)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

क्योंकि प्र के दोनों मान अकरणीगत अभिन्न समीकरणों के पदों के फल हैं (क्योंकि अव्यक्तमान समीकरण पदों के गुणकों के रूप में आ जाते हैं) और जो तभी शून्य हो सकते हैं जब कि फ (य) और फा (य) में एक गुण खण्ड उभय निष्ठ होगा और जब $अ_1$, $अ_2$ ······ और $क_1$, $क_2$ ······ के मान समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाए जायंगे तब दोनों प्र के मान एक ही हो जायंगे।

२०६—प्रत्युत्पन्न के गुण—

(१) प्रत्युत्पन्न में समीकरणों के पदों के गुणकों के वश सब से बड़ा घात अर्थात् सोपान मन होगा यह २०५ प्रक्रम के (१) के रूप ही से स्पष्ट होता है और प्रत्युत्पन्न के पहले रूप में $(-१)^{मन}$ $ब_{०}^{म}$ $प_{म}^{न}$ यह और दूसरे में $प_{०}$ $ब_{न}^{म}$ यह एक पद रहेंगे।

(२) यदि दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान द गुणित हो जायं तो प्रत्युत्पन्न का मान $द^{मन}$ गुणित हो जायगा क्योंकि प्रत्युत्पन्न के मान में ^{मन}गुणकखण्ड प्रत्येक द गुणित हो जाने से अब नया प्रत्युत्पन्न $द^{मन}$ गुणित हो जायगा।

(३) दोनों समीकरणों में अव्यक्तमान यदि एक ही संख्या से बढ़ाए जायं तो प्रत्युत्पन्न ज्यों का त्यों रहेगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न में जो फ$(क_{१})$, फ$(क_{२})$, इत्यादि के

$(क_{१}-अ_{१})\ (क_{१}-अ_{२})\ldots\ldots(क_{१}-अ_{न}),\ (क_{२}-अ_{१})$ $(क_{२}-अ_{२})\cdots\cdots(क_{२}-अ\ )$ इत्यादि मान हैं उनमें $क_{१}, क_{२}\ldots$ और $अ_{१}, अ_{२}\ldots\ldots$ में एक ही संख्या मिलाने से अन्तर में कुछ विकार न होगा।

(४) ऊपर $क_{१}$, $अ_{१}$, इत्यादि के स्थान में यदि $\frac{१}{क_{१}}, \frac{१}{अ_{१}}$, इत्यादि का अर्थात् उनके हरात्मक मान का उत्थापन दें तो

$क_{१}-अ_{१}=\frac{१}{क_{१}}-\frac{१}{अ_{१}}=\frac{अ_{१}-क_{१}}{क_{१}अ_{१}}$; इसलिये प्रत्युत्पन्न =

$$प्र'=प_{म}^{न}\ ब_{न}^{म}\ (-१)^{मन}\frac{(अ_{१}-क_{१})\ (अ_{२}-क_{१})\ldots\ldots}{(अ_{१}अ_{२}\cdots अ_{म})^{न}(क_{१}क_{२}\cdots क_{न})^{म}}$$

परन्तु $अ_१ अ_२ \ldots\ldots अ_म = (-१)^म \frac{प_म}{प_०}$ और

$क_१ क_२ \ldots\ldots\ldots\ldots क_न = (-१)^न \frac{ब_न}{ब_०}$ इनके उत्थापन से

$प्र' = प_०^न\, ब_०^म\, (-१)^{मन}\, (अ_१ - क_१)\, (अ_२ - क_१ \ldots) = (-१)^{मन} प्र$

इस पर से सिद्ध होता है कि मानों के हरात्मक मानों से जो प्रत्युत्पन्न होता है वह मानों के प्रत्युत्पन्न को $(-१)^{मन}$ इससे गुण देने से उत्पन्न होगा। यदि $प्र = ०$ तो $(-१)^{मन}$ से गुण देने से भी शून्य होगा; इसलिये कह सकते हो कि दोनो प्रत्युत्पन्न एक ही हैं।

(५) दोनों समीकरणों में य के स्थान में $\frac{तय + द}{त'य + द'}$ इसके उत्थापन से जो नये दो समीकरण होंगे उनके प्रत्युत्पन्न $प्र' = (तद' - त'द)^{मन} प्र$ ऐसा होगा। इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$फ(य) = प_०\, (य - अ_१)\, (य - अ_२) \ldots\ldots (य - अ_म)$$

$$फा(य) = ब_०\, (य - क_१)\, (य - क_२) \ldots\ldots (य - क_म)$$

और कोई अभिन्न गुणखण्ड पहिले का $= य - अ_थ$

$$= (त - त'अ_थ)\left(य - \frac{द'अ_थ - द}{त - त'अ_थ}\right)$$

अभिन्न दूसरे का गुणखण्ड $= य - क_थ$

$$= (त - त'क_थ)\left(य - \frac{द'क_थ - द}{त - त'क_थ}\right)$$

एकट्ठा गुण देने से

$प_0$ के स्थान में अब $प_0 (त - त'अ_1) (त - त'अ_2) \cdots\cdots (त - त'अ_म)$ होगा; $ब_0$ के स्थान में

$ब_0 (त - त'क_1) (त - त'क_2) \cdots\cdots (त - त'क_न)$ होगा और

$अ_थ$ और $क_थ$ बदल के अब $\dfrac{द'अ_थ - द}{त - त'अ_थ}$ और

$\dfrac{द'क_थ - द}{त - त'क_थ}$ ये होंगे।

$$इसलिये\ अ_थ - क_थ = \frac{(तद' - त'द)(अ_थ - क_थ)}{(त - त'अ_थ)(त - त'क_थ)}$$

$अ_थ - क_थ$, में थ के स्थान में १, २······के उत्थापन से जितने खण्ड होंगे उनके गुणन फल को यदि भा $(अ_थ - क_थ)$ मानो तो

$$प्र' = प_0^न ब_0^म\ भा\ (अ_थ - क_थ)$$

$$= प_0^न ब_0^म (तद' - त'द)^{मन} भा (अ_थ - क_थ)$$

$$= (तद' - त'द)^{मन}\ प्र\ ।$$

इसमें;

$त' = ०, द' = १,$ और $द = ०$ तो (२) उपपन्न होगा।

$त = १, त' = ०$ और $द' = १$ तो (३) उपपन्न होगा।

$त = ०, द = १, त' = १, द' = ०$ तो (४) उपपन्न होगा।

इसलिये (२), (३) और (४) को अलग बालावबोध के लिये लिखा है।

२०७—लुप्तीकरण में ओलर (Euler) की रीति—

जब दो समीकरण फ(य)=० और फा(य)=०, म और न घात के एक मान समान रखते हैं तो मान लो कि

$$\left.\begin{aligned} \text{फ}(य) &= (य-ष)\text{फ}_{१}(य) \\ \text{फा}(य) &= (य-ष)\text{फा}_{१}(य) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

जहां $\text{फ}_{१}(य)=प_{१}य^{म-१}+प_{२}य^{म-२}+\ldots\ldots+प_{म}$

$\text{फा}_{१}(य)=ब_{१}य^{न-१}+ब_{२}य^{न-२}+\ldots\ldots+ब_{न}$

पदों के गुणक इनमें अज्ञात हैं।

$\text{फा}_{१}(य)$ और $\text{फ}_{१}(य)$ से परस्पर गुण देने से (१) से

$$\text{फ}(य)\text{फा}_{१}(य)=\text{फा}(य)\text{फ}_{१}(य)$$

यह सरूप समीकरण $म+न-१$ घात का होगा।

इसलिये य के समान घातों के गुणक समान करने से $म+न$ समीकरण $म+न$ स्थिराङ्क $प_{१}, प_{२}, \ldots प_{म}, ब_{१}, ब_{२} \ldots\ldots ब_{न}$ से बनेंगे, जहां १६७ वें प्रक्रम की क्रिया से प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं।

जैसे मान लो कि

$\text{फ}(य)=अय^{२}+कय+ख=०,$

$\text{फा}(य)=अ_{१}य^{२}+क_{१}य+ख_{१}=०$

ये दो समीकरण दिए हैं तो ऊपर की युक्ति से

$\text{फ}_{१}(य)=प_{१}य+प_{२}$

$\text{फा}_{१}(य)=ब_{१}य+ब_{२}$

$$\therefore (ब_1 य + ब_2)(अय^2 + कय + ख) = (प_1 य + प_2)(अ_1 य^2 + क_1 य + ख_1)$$

वा

$$(ब_1 अ - ब_1 अ_1) य^3 + (ब_1 क + ब_2 अ - प_1 क_1 - प_2 अ_1) य^2 + (ब_1 ख + ब_2 क - प_1 ख_1 - प_2 क_1) य + ब_2 ख - प_2 ख_1 \equiv 0$$

सब गुणकों को शून्य के समान करने से

$$ब_1 अ - प_1 अ_1 = 0$$
$$ब_1 क + ब_2 अ - प_1 क_1 - प_2 अ_1 = 0$$
$$ब_1 ख + ब_2 क - प_1 ख_1 - प_2 क_1 = 0$$
$$ब_2 ख \quad - प_2 ख_1 = 0$$

इस पर से १९७ प्रक्रम की क्रिया से

$$\begin{vmatrix} अ & 0 & अ_1 & 0 \\ क & अ & क_1 & अ_1 \\ ख & क & ख_1 & क_1 \\ 0 & ख & 0 & ख_1 \end{vmatrix} = 0 = प्र$$

२०८—लुप्तीकरण में सिलवेस्टर (Sylvester) की युक्ति

यह ओलर ही की ऐसी रीति है। परन्तु इससे कुछ लाघव से प्रत्युत्पन्न होता है। मान लो कि

$$फ(य) = प_0 य^म + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \cdots\cdots + प_म = 0$$
$$फा(य) = ब_0 य^न + ब_1 य^{न-1} + ब_2 य^{न-2} + \cdots\cdots + ब_न = 0$$

पहिले को क्रम से $य^{न-१}, य^{न-२}, \ldots\ldots य^{२}, य, य^{०}$ इनसे और दूसरे को क्रम से

$य^{म-१}, य^{म-२}, \ldots\ldots य^{२}, य, य^{०}$ इनसे गुण देने से $म+न$ समीकरण बनेंगे जिनमें य का सब से बड़ा घात $म+न-१$ रहेगा। इसलिये इन समीकरणों में $य^{म+न-१}, य^{म+न-२}, \ldots\ldots$ $य^{२}$, य इतने भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से प्रत्युत्पन्न का मान पूर्ववत् आ जायगा। जैसे $अय^{२}+कय+ख=०$,

$अ_{१}य^{२}+क_{१}य+ख_{१}=०$। इनमें ऊपर की युक्ति से पहिले को य, $य^{०}$ से और दूसरे को भी य, $य^{०}$ से गुण देने से

$$\begin{aligned} अय^{३}+कय^{२}+खय &= ० \\ अय^{२}+कय+ख &= ० \\ अ_{१}य^{३}+क_{१}य^{२}+ख_{१}य &= ० \\ अ_{१}य^{२}+क_{१}य+ख_{१} &= ० \end{aligned}$$

इनमें $य^{३}, य^{२}$, य को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से पूर्ववत्

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ० \\ ० & अ & क & ख \\ अ_{१} & क_{१} & ख_{१} & ० \\ ० & अ_{१} & क_{१} & ख_{१} \end{vmatrix} = ० = प्र।$$

यदि उर्ध्वाधरों को तिर्यक् पंक्तिओं में ले जाव तो यह वही है जो कि ओलर की क्रिया से ऊपर के प्रक्रम में सिद्ध हुआ है।

२०६—लुप्तीकरण में बेज़ौट की (Bezout) क्रिया

पहिले जब दोनों समीकरण तुल्य ही घात के हैं तो

(१) कल्पना करो कि समीकरण

$अय^3 + कय^2 + खय + ग = ०;$

$अ_1 य^3 + क_1 य^2 + ख_1 य + ग_1 = ०$

ये हैं।

दोनों को क्रम से

$$अ_1 \text{ और } अ;$$

$$अ_1 य + क_1 \text{ और } अय + क$$

$$अ_1 य^2 + क_1 य + ख_1 \text{ और } अय^2 + कय + ख$$

से गुण कर प्रति बार परस्पर घटाने से और १८७ प्रक्रम के सङ्केत से लिखने से

$$(अक_1)य^2 + (अख_1)य + (अग_1) = ०$$

$$(अख_1)य^2 + \{ (अग_1) + (कख_1) \}य + (कग_1) = ०$$

$$(अग_1)य^2 + (कग_1)य + (खग_1) = ०$$

ये समीकरण हुए, इनमें $य^2$ और य को भिन्न अव्यक्त मानने से १९७ प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{vmatrix} (अक_1), & (अख_1), & (अग_1) \\ (अख_1), & (अग_1) + (कख_1), & (कग_1) \\ (अग_1), & (कग_1), & (खग_1) \end{vmatrix} = ० = प ।$$

यह प्रत्युत्पन्न एक तद्रूप कनिष्ठफल के रूप में आया है। प्रत्युपन्न जानने के लिये अनुगम निकालने के लिये और एक उदाहरण लेते हैं ;

कल्पना करो कि

$$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०,$$

$$अ_{१}य^{४} + क_{१}य^{३} + ख_{१}य^{२} + ग_{१}य + घ_{१} = ० ।$$

ये समीकरण हैं तो बेज़ौट ही की युक्ति से

$$\frac{अ}{अ_{१}} = \frac{कय^{३} + खय^{२} + गय + घ}{क_{१}य^{३} + ख_{१}य^{२} + ग_{१}य + घ_{१}} ।$$

$$\frac{अय + क}{अ_{१}य + क_{१}} = \frac{खय^{२} + गय + घ}{ख_{१}य^{२} + ग_{१}य + घ_{१}} ।$$

$$\frac{अय^{२} + कय + ख}{अ_{१}य^{२} + क_{१}य + ख_{१}} = \frac{गय + घ}{ग_{१}य + घ_{१}} ।$$

$$\frac{अय^{३} + कय^{२} + खय + ग}{अ_{१}य^{३} + क_{१}य^{२} + ख_{१}य + ग_{१}} = \frac{घ}{घ_{१}} ।$$

समशोधन कर एक ओर सब पदों के ले जाने से पूर्ववत् चार समीकरण बनेंगे जिनमें $य^{३}$, $य^{२}$, $य$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान कर उनका लोप करने से

$$\begin{vmatrix} (अक_{१}), & (अख_{१}), & (अग_{१}), & (अघ_{१}) \\ (अख_{१}), & (अग_{१}) + (कख_{१}), & (अघ_{१}) + (कग_{१}), & (कघ_{१}) \\ (अग_{१}), & (अघ_{१}) + (कग_{१}), & (कघ_{१}) + (खग_{१}), & (खघ_{१}) \\ (अघ_{१}), & (कघ_{१}), & (खघ_{१}), & (गघ_{१}) \end{vmatrix}$$

यह जो प्रत्युत्पन्न हुआ है वह यदि ध्यान दे कर देखो तो

$$\begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1) \\ (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{कख}_1) \\ (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1) \\ (\text{अघ}_1), & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), & (\text{गघ}_1) \end{vmatrix}$$

इसके मध्यवर्ती चार ध्रुवों में

$$\begin{vmatrix} (\text{कख}_1), & (\text{कग}_1) \\ (\text{कग}_1), & (\text{खग}_1) \end{vmatrix}$$

इसके क्रम से चारो ध्रुवों को जोड़ देने से उत्पन्न हुआ है। इसी प्रकार

$$\text{अय}^5 + \text{कय}^4 + \text{खय}^3 + \text{गय}^2 + \text{घय} + \text{ङ} = 0$$

$$\text{अ}_1\text{य}^5 + \text{क}_1\text{य}^4 + \text{ख}_1\text{य}^3 + \text{ग}_1\text{य}^2 + \text{घ}_1\text{य} + \text{ङ}_1 = 0$$

इसका प्रत्युत्पन्न

$$\begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1) & (\text{अङ}_1) \\ (\text{अख}_1), & (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1) & (\text{कङ}_1) \\ (\text{अग}_1), & (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1) & (\text{खङ}_1) \\ (\text{अघ}_1), & (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1), & (\text{खङ}_1) & (\text{गङ}_1) \\ (\text{अङ}_1), & (\text{कङ}_1), & (\text{खङ}_1), & (\text{गङ}_1) & (\text{घङ}_1) \end{vmatrix}$$

इसके मध्यवर्ती नव ध्रुवों में

$$\begin{vmatrix} (\text{कख}_1), & (\text{कग}_1), & (\text{कघ}_1), \\ (\text{कग}_1), & (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), \\ (\text{कघ}_1), & (\text{खघ}_1), & (\text{गघ}_1), \end{vmatrix}$$

क्रम से इसके नवों ध्रुवों के जोड़ने से और योग के मध्यवर्त्ती एक ध्रुव में (खग_1) इसको मिला देने से उत्पन्न होता

है। इसी प्रकार आगे और उदाहरणों में भी जान लेना चाहिए।

(२) जहाँ दोनों समीकरण भिन्न भिन्न घात के हैं तहां मान लो कि समीकरण

$$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$$
$$अ_{१}य^{२} + क_{१}य + ख_{१} = ०$$ ये हैं।

दोनों को क्रम से $अ_{१}$ और $अय^{२}$;

$अ_{१}य + क_{१}$ और $(अय + क)य^{२}$

से गुण कर अन्तर करने से

$$(अक_{१})य^{३} + (अख_{१})य^{२} - गअ_{१}य - घअ_{१} = ०$$
$$(अख_{१})य^{३} + \{(कख_{१}) - गअ_{१}\}य^{२}$$
$$(गक_{१} + घअ_{१})य - घक_{१} = ०$$

और दूसरे को य और १ से गुण देने से

$$अ_{१}य^{३} + क_{१}य^{२} + ख_{१}य = ०$$
$$अ_{१}य^{२} + क_{१}य + ख_{१} = ०$$

अब चार समीकरण हुए जिनमें $य^{३}, य^{२}, य$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से

$$\begin{vmatrix} (अक_{१}), & (अख_{१}), & गअ_{१}, & घअ_{१} \\ (अख_{१}), & (कख_{१}) - गअ_{१}, & गक_{१} + घअ_{१}, & घक_{१} \\ अ_{१}, & क_{१}, & -ख_{१}, & ० \\ ०, & अ_{१}, & -क_{१}, & -ख_{१} \end{vmatrix} = अ$$

इसी प्रकार

$$फ(य)=प_0 य^म + प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \ldots\ldots + प_म = 0$$

$$फा(य)=ब_0 य^न + ब_1 य^{न-1} + ब_2 य^{न-2} + \ldots\ldots + ब_न = 0$$

इनमें जहां $म > न$ दूसरे समीकरण को $य^{म-न}$ से गुण देने से $ब_0 य^म + ब_1 य^{म-1} + ब_2 य^{म-2} + \ldots\ldots + ब_न य^{म-न} = 0$

यह उसी घात का हो गया जिस घात का प्रथम समीकरण है। इस समीकरण फा(य)=० में न अव्यक्त मान के साथ $म-न$ अव्यक्त मान जो शून्य के तुल्य हैं और मिले हैं। इसलिए प्रत्युत्पन्न के लिये फ (य) में $म-न$ बार शून्य के उत्थापन से $प_म$ यही रहेगा। फिर उनके परस्पर गुणन से प्रत्युत्पन्न में एक गुण्य गुणक रूप में खण्ड $प_म^{म-न}$ यह रहेगा जो कि व्यर्थ है। इसलिये ऊपर के समीकरणों से (१) युक्ति से नीचे लिखे न समीकरण बनेंगे।

$$\frac{प_0}{ब_0} = \frac{प_1 य^{म-1} + प_2 य^{म-2} + \ldots\ldots + प_म}{ब_1 य^{म-1} + ब_2 य^{म-2} + \ldots\ldots + ब_न य^{म-न}}$$

$$\frac{प_0 य + प_1}{ब_0 य + ब_1} = \frac{प_2 य^{म-2} + प_3 य^{म-3} + \ldots\ldots + प_म}{ब_2 य^{म-2} + ब_3 य^{म-3} + \ldots\ldots + ब_न य^{म-न}}$$

....

$$\frac{प_0 य^{न-1} + प_1 य^{न-2} + \cdots + प_{न-1}}{ब_0 य^{न-1} + ब_1 य^{न-2} + \cdots + ब_{न-1}}$$

$$= \frac{प_न य^{म-न} + प_{न-1} य^{म-न-1} + \cdots + प_म}{ब_न य^{म-न}}$$

इनमें छेदगम से य का सबसे बड़ा $म-1$ घात होगा। इसलिये

$य^{म-१}, य^{म-२}, \ldots\ldots य$, को भिन्न भिन्न अव्यक्त मानने से ऊपर न समीकरणों से और

$$ब_० य^{म-१} + ब_१ य^{म-२} + ब_२ य^{म-३} + \ldots\ldots = ०$$

$$ब_० य^{म-२} + ब_१ य^{म-३} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = ०$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ब_० य^{न} + ब_१ य^{न-१} + \ldots\ldots\ldots\ldots + ब_म = ०$$

इन म—न समीकरणों से म अक्षर पंक्ति के कनिष्ठफल के रूप में प्रत्युत्पन्न का मान जान सकते हैं जिसमें अब ऊपरी गुण्य गुणक रूप खण्ड जो कि म—न मान शून्य के मिलाने से आता था न आवेगा।

यदि फ (य) = ०, फा(य)=० में जहां दोनों समीकरणों में घात संख्या एक ही म है, प्रत्युत्पन्न प्र हो तो

$$त फ(य) + द' फा(य) = ०,$$

$$त' फ(य) + द' फा(य) = ० ।$$

इनमें प्रत्युत्पन्न $= प्र' = (तद' - त'द)^{म}$ प्र ऐसा होगा क्योंकि बेज़ौट की युक्ति से पहिले प्रत्युत्पन्न में जो कोई $(अ_थ क_स)$ यह मान था वही इस स्थिति में

$$\begin{vmatrix} त अ_थ + द क_थ, & त' अ_थ + द' क_थ \\ त अ_स + द क_स, & त' अ_स + द' क_स \end{vmatrix}$$

$$= (तद' - त'द)\ (अ_थ क_स)$$

इसलिये (तद' — त'द) इस गुणक के म बार आने से

$$प्र' = (तद' - त'द^{म})\ प्र \text{ ऐसा होगा ।}$$

२१०—२०५वें प्रक्रम से सिद्ध है कि प्रत्युत्पन्न

$$\text{प्र} = \text{प}_0^{\text{न}}\,\text{फा}(\text{अ}_1),\ \text{फा}(\text{अ}_2)\cdots\cdots\text{फा}(\text{अ}_{\text{म}})$$
$$= (-1)^{\text{मन}}\,\text{ब}_0^{\text{म}}\,\text{फ}(\text{क}_1)\,\text{फ}(\text{क}_2)\cdots\cdots\text{फ}(\text{क}_{\text{न}})$$

यह है इसमें फा (अ_1), फा (अ_2)······में अ_1, अ_2 का घात न रहेगा जिनके मान पहिले समीकरण के पदों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात न ही रहेगा (१६०वां प्रक्रम देखो)। इसी प्रकार फ (क_1), फ (क_2), इत्यादि में क_1, क_2 इत्यादि के सब से बड़ा घात म के रहने से उनका रूप दूसरे समीकरणों के गुणकों के रूप में बनाने से गुणकों में भी सब से बड़ा घात म ही रहेगा। और उनमें घातों का परम योग नम रहेगा। इससे सिद्ध होता है कि प्रत्युत्पन्न के मान में घातों का परम योग मन रहेगा और फ $(\text{य}') = 0$ इसके गुणकों का सब से बड़ा घात न और फा $(\text{य}) = 0$ इसके गुणक का सब से बड़ा घात म रहेगा। यदि किसी और क्रिया से ऊपर की स्थिति न आवै तो समझना चाहिए कि वास्तव प्रत्युत्पन्न किसी ऊपरी गुणक से गुणित आया है जिसे ढूंढ कर अलग कर देना चाहिए। जैसे

$$\text{अय}^2 + \text{कय} + \text{ख} = 0,$$
$$\text{अ}_1\text{य}^2 + \text{क}_1\text{य} + \text{ख}_1 = 0\ \text{।}$$

इनमें यदि दोनों को क्रम से अ_1, अ और ख_1, ख से गुण कर अन्तर करो तो—

$$(\text{अक}_1)\text{य} + (\text{अख}_1) = 0$$
$$(\text{अख}_1)\text{य} + (\text{कख}_1) = 0$$

ऐसे समीकरण होंगे। इनमें यदि य का लोप करो तो

$$\text{प} = (\text{अख}_1)^2 - (\text{अक}_1)(\text{कख}_1) = 0$$

यहां देखते हैं कि दोनों समीकरणों के गुणक के घात म और न के २ के तुल्य होने से दो आए हैं और प्रत्येक पद में घातों का परम योग भी मन = ४ है। इसलिये ऊपर की स्थिति के होने से कहेंगे कि प्रत्युत्पन्न ठीक है।

परन्तु यदि $\text{अय}^3 + \text{कय}^2 + \text{खय} + \text{ग} = 0$,

$$\text{अ}_1\text{य}^3 + \text{क}_1\text{य}^2 + \text{ख}_1\text{य} + \text{ग}_1 = 0 \text{ ।}$$

इनमें दोनों को क्रम से अ_1; अ और ग_1, ग से गुण कर अन्तर करो तो

$$(\text{अक}_1)\text{य}^2 + (\text{अख}_1)\text{य} + (\text{अग}_1) = 0,$$

$$(\text{अग}_1)\text{य}^2 + (\text{कग}_1)\text{य} + (\text{खग}_1) = 0 \text{ ।}$$

ऐसे समीकरण बनेंगे। इनमें य^2 और य के लोप करने से ऊपर के उदाहरण की युक्ति से

$$\text{प} = \begin{vmatrix} (\text{अक}_1), & (\text{अख}_1) \\ (\text{अग}_1), & (\text{खग}_1) \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} (\text{अक}_1) & (\text{अख}^1) \\ (\text{अग}_1) & (\text{कग}_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\text{अख}_1), & \text{अग}_1 \\ (\text{कग}_1), & \text{खग}_1 \end{vmatrix}$$

यहां देखते हैं कि गुणकों का सब से बड़ा घात ४ अर्थात् दोनों समीकरणों के गुणकों के घात मिलाने से ८ और पद के गुणकों के घातों का योग १२ है, परन्तु प्रत्युत्पन्न के वास्तव मान में जो मिला हुआ घात ६ और पद के गुणकों के घातों का योग ९ चाहिए; इसलिये आए हुए प्रत्युत्पन्न में गुणक

गुणक रूप खण्ड कोई बढ़ गया है जिसे अलग करने से तब वास्तव प्रत्युत्पन्न होगा ।

यहां ढूंढने से तो जान पड़ेगा कि वह खण्ड $(अग_१)$ यह है जिससे भाग देने से

वास्तव प्रत्युत्पन्न $= (अग_१)^३ — _२(अक_१)(खग_१)(अग_१) + कग_१)(खअ_२)(अग_१) + (खअ_१)^२(खग_१) + (अक_१)(कग_१)^२ + (अक_१)(कख_१)(खग_१)$ ।

२११—यदि $फ(य) = ०$ इसमें एक मान दो बेर हो तो स्पष्ट है कि $फ'(य) = ०$ इसमें भी वह मान एक बेर होगा वा $नफ(य) — य फ'(य) = ०$ इसमें वह मान एक बेर होगा । यह $न — १$ घात का समीकरण है; और $फ'(य)$ भी $न — १$ घात का समीकरण है; इसलिये इन दोनों पर से $य^{न-१}$ $य^{न-२}$ इत्यादि का लोप करने से जो गुणकों से एक कनिष्ठफल उत्पन्न होगा उसे उत्पन्न कहो । वह जिस समय शून्य होगा उस स्थिति में कहेंगे कि वही प्रत्युत्पन्न होगा और $फ(य) = ०$ इसमें एक मान दो बार आवेगा । जैसे

१ । $अ_०य^३ + ३अ_१य^२ + ३अ_२य + अ_३ = ०$ इसमें उत्पन्न का मान बताओ ।

$$फ(य) = अ_०य^३ + ३अ_१य^२ + ३अ_२य + अ_३ = ०$$

$$फ'(य) = ३अ_०य^२ + ६अ_१य + ३अ_२ = ०$$

$$नफ(य) = ३अ_०य^३ + ६अ_१य^२ + ६अ_२य + ३अ_३ = ०$$

$$यफ'(य) = ३अ_०य^३ + ६अ_१य^२ + ३अ_२य = ०$$

$$नफ' — यफ'(य) = ३अ_१य^२ + ६अ_२य + ३अ_३ = ०$$

३ के अपवर्तन से $अ_१य^२ + २अ_२य + अ_३ = ०$

$फ'(य)$ में ३ के भाग देने से $अ_०य^२ + २अ_१य + अ_२ = ०$

२०४वें प्रक्रम से उत्पन्न

$$=४(अ_०अ_२ - अ^२_१)(अ_१अ_३ - अ^२_२) - (अ_०अ_३ - अ_१अ_२)^२$$

यही जब शून्य के तुल्य होगा तब $फ(य) = ०$ इसमें एक मान दो बार आवेगा।

वही प्रत्युत्पन्न २०८ वें प्रक्रम से

$$\begin{vmatrix} अ_० & २अ_१ & अ_२ & ० \\ ० & अ_० & २अ_१ & अ_२ \\ अ_१ & २अ_२ & अ_३ & ० \\ ० & अ_१ & २अ_२ & अ_३ \end{vmatrix} = ० \text{ ऐसा होगा।}$$

इसी प्रकार और उदाहरणों में भी जानना चाहिए।

२१२। २०८ प्रक्रम में जो प्रत्युत्पन्न का मान एक कनिष्ठफल के रूप में आया है उसके प्रथम ऊर्ध्वाधर पंक्तिस्थ संख्यात्मक ध्रुव $प_०$ और $ब_०$ ये ही दो होंगे। और सब शून्य होंगे। इसलिये यदि $प_०$ ध्रुव का प्रथम लघु कनिष्ठफल $पा_०$ और $ब_०$ का प्रथम लघु कनिष्ठफल $बा_०$ कहो तो प्रत्युत्पन्न $= प_०पा_० + ब_०बा_०$ ऐसा होगा (१८६ प्रक्रम देखो) जहां $पा_०$ और $बा_०$ दिए हुए समीकरणों के पद गुणकों के फल हैं।

$$प_०पा_० + ब_०बा_० = प्र \cdots\cdots\cdots (१)$$

इसे स्मरण कर रक्खो।

२१३—यदि

$$स = प_मय^म + प_{म-१}य^{म-१} + \cdots\cdots + प_० \qquad = ०$$

$$स_१ = ब_नय^न + ब_{न-१}य^{न-१} + \cdots\cdots + ब_० \qquad = ०$$

इन दोनों का प्रत्युत्पन्न प्र हो तो २१२वें प्रक्रम से

$प्र = प_मपा_म \;\; ब_नबा_न$ जहां पा और $बा_न$ समीकरणों के पद

गुणकों के फल हैं। इनके हरात्मक समीकरणों का प्रत्युत्पन्न $प_०पा_० + ब_०बा_०$ जो कि २०६ प्रक्रम के (४) से इनके प्रत्युत्पन्न के समान है। इस प्रत्युत्पन्न में $प_०$ और $ब_०$ के स्थान में $प_० - स$ और $ब_० - स$ का उत्थापन देने से

$$० = प_०पा_० - सपा_० + ब_०बा_० - स_१ बा_०$$

$$\therefore प_०पा_० + ब_०बा_० = प्र = सपा_० + स_१बा_०$$

$प_त$ और $प_{त+१}$ गुणक के वश तात्कालिक संबन्ध, चलन-कलन से, निकालने से

$$\frac{ताप्र}{ताप_त} = य^त पा_० + स \frac{तापा_०}{ताप_त} + स_१ \frac{ताबा_०}{ताप_त}$$

$$\frac{ताप्र}{ताप_{त+१}} = य^{त+१} पा_० + स \frac{तापा_०}{ताप_{त+१}} + स_१ \frac{ताबा_०}{ताप_{त+१}}$$

मान लो कि जब य=अ तो दोनों समीकरण शून्य होते हैं अर्थात् अ यह दोनों समीकरणों में य का एक मान है तब इसके उत्थापन से

$$\frac{ताप्र}{ताप_त} = अ^त पा_० \text{ और } \frac{ताप्र}{ताप_{त+१}} = अ^{त+१} पा_०$$

$$\therefore अ = \frac{\frac{ताप्र}{ताप_{+१}}}{\frac{ताप्र}{ताप_त}}$$

त के स्थान में ०, १, २, ३ ··· के उत्थापन से

$$अ = \frac{\frac{ताप्र}{ताप्र_१}}{\frac{ताप्र}{ताप_०}} = \frac{\frac{ताप्र}{ताप_२}}{\frac{ताप्र}{ताप_१}} = \frac{\frac{ताप्र}{ताप_३}}{\frac{ताप्र}{ताप_२}} = इत्यादि$$

इस पर से दोनों समीकरणों में जो अव्यक्तमान एक ही है उसका मान जान सकते हो। इस प्रकार फ (य)=० का यदि एक मूल दो बार हो तो उस मूल का भी पता २११ प्रक्रम के दोनों समीकरणों से लगा सकते हो।

२१४। यदि दिए हुए दो समीकरणों के मूलों के तद्रूपफल का मान निकालना हो तो नीचे की क्रिया करो।

कल्पना करो कि

$$फ\,(य) = प_०य^म + प_१य^{म-१} + प_२य^{म-२} + \cdots + प_म = ० \quad (१)$$

जिसके मूल $अ_१, अ_२, अ_३, \cdots\cdots अ_म$ हैं।

और $$फा\,(र) = ब_०र^न + ब_१र^{न-१} + ब_२र^{न-२} + \cdots + ब_न = ० \quad (२)$$

जिसके मूल $क_१, क_२, क_३ \cdots\cdots\cdots क_न$ हैं।

कल्पना करो कि एक नया मूल ल ऐसा है कि जिसके वश से $ल = तय + दर$ ऐसा समीकरण बनता है।

इससे ल और य के रूप में र का मान जान (२) में उत्थापन देने से एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें य का सब से बड़ा घात न रहेगा और जिसमें त, द और ल के भी सब से बड़े घात न होंगे।

अब (१) और इस नये समीकरण में ऊपर के प्रक्रमों की किसी युक्ति से य का लोप करो तो एक ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ल का सब से बड़ा घात मन होगा; इसलिये ल का मान जो $तअ_१ + दक_१$ इस प्रकार का है वह म न विध होगा।

अब यदि ऐसी इच्छा हो कि फ (य) और फा (र) के पद गुणकों के रूप में यौ $अ_१^थ क_१^ध$ इसका मान जानें तो ल के वश से जो समीकरण बना है उसमें अव्यक्तमानों के (थ+ध)

घात के योग का मान निकालें उसमें $त^{य}द^{घ}$ का जो गुणक होगा वही स्पष्ट है कि यो $अ_{१}$, $क^{ध}_{१}$ का मान होगा।

उदाहरण

१। $अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$ । $य^{५} = १$

इनमें य का लोप करो।

पहिले समीकरण

$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$ इसे य से गुण देने से

और $य^{५} = १$ से $अ + कय^{४} + खय^{३} + गय^{२} + घय = ०$

फिर य से गुणने से, $अय + क + खय^{४} + गय^{३} + घय^{२} = ०$

फिर य से " $अय^{२} + कय + ख + गय^{४} + घय^{३} = ०$

फिर य से " $अय^{३} + कय^{२} + खय + ग + घय^{४} = ०$

घात क्रम से लिखने से

$$अय^{४} + कय^{३} + खय^{२} + गय + घ = ०$$
$$कय^{४} + खय^{३} + गय^{२} + घय + अ = ०$$
$$खय^{४} + गय^{३} + घय^{२} + अय + क = ०$$
$$गय^{४} + घय^{३} + अय^{२} + कय + ख = ०$$
$$घय^{४} + अय^{३} + कय^{२} + खय + ग = ०$$

इनमें $य^{४}$, $य^{३}$, $य^{२}$ और य के लोप करने से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & घ \\ क & ख & ग & घ & अ \\ ख & ग & घ & अ & क \\ ग & घ & अ & क & ख \\ घ & अ & क & ख & ग \end{vmatrix} = ०$$

नीचे से तिर्यक् पंक्तिओं को एक एक उठा कर ऊपर की तिर्यक पंक्ति के नीचे रक्खो तो वह ठीक २०२ प्रक्रम के २०वें उदाहरण के ऐसा हो जायगा।

२। ऊपर ही की युक्ति से दिखलाओ कि $अय^2 + कय + ख = 0$ और $य^3 = 1$

इनका प्रत्युत्पन्न

$$= \begin{vmatrix} अ & क & ख \\ क & ख & अ \\ ख & अ & क \end{vmatrix} = 0$$

३। ओलर की रीति से दिखलाओ कि किस स्थिति में

$$फ(य) = अय^3 + कय^2 + खय + ग = 0$$
$$फा(य) = अ'य^3 + क'य^2 + ख'य + ग' = 0$$

इनमें दो अव्यक्तमान उभयनिष्ठ होंगे।

यहां $(य - ष)$ $(य - ष_1)$ इस प्रकार के दो खण्ड दोनों में उभयनिष्ठ होंगे। इसलिये तीसरा खण्ड क्रम से $दय + त$ और $द'य + त'$ मान लिये जायँ तो

$$(द'य + त')\, फ(य) = (दय + त)\, फा(य)$$

जहां $द, त, द'$ और $त'$ अज्ञात हैं। ऊपर के सरूप समीकरण से

$$\begin{array}{llll} द'अ & & - दअ' & = 0 \\ द'क + त'अ & - दक' & - तअ' & = 0 \\ द'ख + त'क & - दख' & - तक' & = 0 \\ द'ग + त'ख & - दग' & - तख' & = 0 \\ \quad तग' & & - तग' & = 0 \end{array}$$

इन पांचो समीकरणों में से कोई चार लेकर द′, त′, द और त का लोप कर सकते हो। इस प्रकार लोप करने में पांच कनिष्ठफल बनेंगे जिनके मान शून्य होनेसे उदाहरण की स्थिति ठीक होगी। पांचों कनिष्ठफलों को लाघव से

$$\begin{vmatrix} अ & क & ख & ग & ० \\ ० & अ & क & ख & ग \\ अ' & क' & ख' & ग' & ० \\ ० & अ' & क' & ख' & ग' \end{vmatrix} = ०$$

यहां यह दिखलाता है कि एक एक ऊर्ध्वाधर पंक्तिओं को मिटा देने से जो पांच कनिष्ठफल होंगे उनके मान शून्व हैं।

४। सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} अ^२ & २\,अक & क^२ \\ अअ' & अक' + अ'क & कक' \\ अ'^२ & २\,अ'क' & क'^२ \end{vmatrix} \equiv (अक' - अ'क)^३ = कफ$$

$$अय + कर = ०,$$

$$अ'य + क'र = ० ।$$

इन दोनों से १८६ प्रक्रम की युक्ति से

$$(अक' - अ'क)\,य = \begin{vmatrix} ० & क \\ ० & क' \end{vmatrix} = ०$$

$$\therefore \quad (अक' - अ'क)\,य^२ = ० \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

और $(अय + कर)^२ = ०,$

$(अय + कर)\,(अ'य + क'र) = ०$

$(अ'य + क'र)^२$

इन तीनों में $\text{य}^{२}$, यर और $\text{र}^{२}$ को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लेने से १६६ प्रक्रम की युक्ति से

$$\text{कफय}^{२} = ०$$

$$\therefore \text{कफय}^{३} = ० \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

(१) और (२) के समता से ऊपर का सरूप समीकरण सिद्ध हो जायगा।

५। ऊपर की युक्ति से सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{अ}^{३} & ३\,\text{अ}^{२}\text{क} & ३\,\text{अक}^{२} & \text{क}^{३} \\ \text{अ}^{२}\text{अ}' & \text{अ}^{२}\text{क}' + २\,\text{अअ}'\text{क} & २\,\text{अकक}' + \text{अ}'\text{क}^{२} & \text{कक}' \\ \text{अअ}'^{२} & \text{अ}'^{२}\text{क} + २\,\text{अअ}'\text{क}' & २\,\text{अ}'\text{कक}' + \text{अक}'^{२} & \text{कक}'^{२} \\ \text{अ}'^{३} & ३\,\text{अ}'^{२}\text{क}' & ३\,\text{अ}'\text{क}'^{२} & \text{क}'^{३} \end{vmatrix} \equiv (\text{अक}' - \text{अक})^{३}$$

यहां $\text{अय} + \text{कर} = ०$,

$\text{अ}'\text{य} + \text{क}'\text{र} = ०$।

इन समीकरणों से

$$(\text{अय} + \text{कर})^{३} = ०,$$
$$(\text{अय} + \text{कर})^{२}(\text{अ}'\text{य} + \text{कर}) = ०$$
$$(\text{अय} + \text{कर})(\text{अ}'\text{य} + \text{क}'\text{र})^{२} = ०$$
$$(\text{अ}'\text{य} + \text{क}'\text{र})^{३} = ०$$

ये चार समीकरण बना कर इनमें $\text{य}^{३}$, $\text{य}^{२}\text{र}$, $\text{यर}^{२}$, $\text{र}^{३}$ का लोप करा तो बाईं ओर का कनिष्ठफल उत्पन्न होगा फिर पिछले उदाहरण की युक्ति से और बातें जानो।

६। $\text{फ}(\text{य}) = ०$, $\text{फ}'(\text{य}) + \text{फ}''(\text{य})\dfrac{\text{र}}{१\cdot२} + \text{फ}'''(\text{य})\dfrac{\text{र}^{२}}{३!} + \cdots = ०$

इनमें य को लोप कर नया समीकरण बनाओ और सिद्ध करो कि उसमें अव्यक्त मान फ (य)= ० इसके दो दो मूलों के अन्तर के समान होंगे।

मान लो कि $फ(य) = (य - अ_१)(य - अ_२) \cdots (य - अ_न)$ य के स्थान में $र + अ_१$, $र + अ_२$, $र + अ_३$ ...$र + अ_न$ के उत्थापन से

$$\left.\begin{array}{l} फ(र+अ_१) = र\{र+(अ_१-अ_२)\}\{र+(अ_१-अ_२)\}\cdots \\ फ(र+अ_२) = र\{र+(अ_२-अ_१)\}\{र+(अ_२-अ_१)\}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ फ(र+अ_न) = र\{र+(अ_न-अ_१)\}\{र+(अ_न-अ_२)\}\cdots \end{array}\right\}$$

और साधारण से $\frac{१}{र} फ(र+अ_त) = फ'(अ_त') +$

$$फ''(अ_त)\frac{र}{१\cdot२} + फ'''(अ_त)\frac{र^२}{३!} + \cdots\cdots\cdots$$

इसमें त को १, २, ३, ... न मान कर दहिने पक्षों के घात को (१) इसके दहिने पक्ष के घात के समान करो।

२१५—यदि दो समीकरण ऐसे हों जिनमें दो अव्यक्त य, र हों उनमें यदि एक समीकरण में केवल $य^म$ घात हो और कहीं किसी पद में य न रहे तो समीकरण की युक्ति से $य^म$ का मान र के रूप में आवेगा और इस पर से य का मान जान इसका उत्थापन दूसरे में देने से एक ऐसा समीकरण बन जायगा जिसमें केवल र ही रहेगा। इस प्रकार दोनों समीकरणों से एक नया समीकरण बन गया जिसमें से य निकल गया। फिर इस समीकरण की आकृति से र का ठीक ठीक वा आसन्न मान पिछले अध्यायों की युक्ति से आ जायगा जिससे य के मान का भी ज्ञान हो जायगा।

कल्पना करो कि उन दोनों समीकरणों के रूप आ = ०, का = ० ऐसे हैं जहां आ और का दोनों य और र के फल हैं और गुण्य गुणक रूप खण्डों में आ = स स′ स″ और का = श श′ ऐसा हो जाता है तो दिए हुए समीकरणों के सब मूल स = ०, और श = ०, स = ० और श′ = ०, स′ = ० और श = ० स′ = ० और श′ = ०, स″ = ० और श = ०, स″ = ० और श′ = ० इन समीकरणों से आ जायंगे जो कि पहिले दोनों समीकरणों की अपेक्षा अल्प घात के होंगे।

संभव है कि दोनों समीकरण के गुण खण्डों में कोई समान हों जैसे ऊपर के उदाहरण में संभव है कि स=श ऐसा हो, ऐसी स्थिति में जो य और र के मान आ = ० इसे सत्य रक्खेंगे वे का = ० इसे भी सत्य रखेंगे; इसलिये स = ० इसमें चाहे र का जो मान मान उसके उत्थापन से तत्सम्बन्धी य का मान जान सकते हैं। इस प्रकार कुट्टक की युक्ति से यहां अनेक य और र के मान आवेंगे। यदि इस स्थिति में स = ० इसमें एक ही अव्यक्त हो तो उसका मान तो स = ० इससे परिमित होंगे और दूसरे का मान चाहे जो मान सकते हो।

२१६—कल्पना करो कि $फ_1$(य,र)=० और $फ_2$(य,र)=० इनमें य = $अ_1$, र = $क_1$ तो समीकरण ठीक रहते हैं। तो $फ_1$(य,$क_1$) =० और $फ_2$(य,$क_1$) = ० ये दोनों य के $अ_1$ तुल्यमान में सत्य रहेंगे। इसलिये दोनों समीकरण य—$अ_1$ इससे निःशेष होंगे अर्थात् $फ_1$(य,$क_1$) और $फ_2$(य,$क_1$) का महत्तमापवर्त्तन अवश्य य—$अ_1$ होगा। अर्थात् $फ_1$(य,$क_1$) और $फ_2$(य,$क_1$) का महत्तमापवर्त्तन जो हो उसे शून्यके

समान करने से य का एक मान अ, वा अनेक मान ऐसे आवेंगे जिनके वश से जब र = क, तब दोनों समीकरण ठीक रहेंगे।

कल्पना करो कि फ$_1$(य,र) और फ$_2$(य,र) में य के अपचित घात क्रम से पदों को रख कर महत्तमापवर्त्तन निकालने के लिये क्रिया करना आरम्भ किया और करते करते अन्त में ऐसा शेष बचा जो केवल र का फल है अर्थात् शेष = फ(र) ऐसा हुआ तो जब तक फ(र) = ० ऐसा न होगा तब तक फ$_1$(य,र), फ$_2$(य,र) का कोई महत्तमापवर्त्तन न होगा; इसलिये य के एक ही मानमें दोनों शून्य के समान नहीं हो सकते। यह कुछ नियम नहीं कि फ(र) = ० इसमें जितने र के मान आवेंगे सब से दोनों समीकरणों की सत्यता ठीक रहेगी क्योंकि संभव है कि क्रिया करने में य के किसी घात का गुणक जो र के रूप में है भिन्न हो और र का कोई फल हर में हो जिसमें फ (र) =० इसके एक अव्यक्त मान के उत्थापन से फल शून्य के समान हो ऐसी दशा में उस राशि का मान अनन्त होगा जो कि यहाँ पर उचित नहीं। जैसे यदि

$$फ_1 (य,र) = लफ_{२_1} (य,र) + फ (र)$$

तो यदि ल = लब्धि अभिन्न हो तो परिमिति के मान के उत्थापन से अनन्त नहीं होगा; इसलिये फ (र) = ० और फ$_2$ (य,र) = ० इन परसे जो य, और र के मान होंगे उनके उत्थापन से फ$_1$ (य,र) = ० यह ठीक शून्य ही होगा; इसलिये कहेंगे कि य और र के मान ठीक हैं। परन्तु यदि ल भिन्न हो और उसके हर में र का कोई फल हो तो संभव है कि फ(र) = ० फ$_2$(य,र) = ० इनसे जो र का मान हो उसके

उत्थापन से ल$फ_2$(य,र) = ∞ वा ल$फ_2$(य,र) = $\frac{0}{0}$ ऐसा हो, ऐसी स्थिति में $फ_1$(य,र)=∞ वा $फ_1$(य,र)= $\frac{0}{0}$ ऐसा होगा जो कि समीकरण की स्थिति से अशुद्ध है। यदि एक गुणक $ख_1$ जो कि केवल र का फल है इससे $फ_1$(य,र) को गुण $फ_2$(य,र) इसका भाग दें जिसमें लब्धि अभिन्न आवे तो अब

$ख_1$ $फ_1$(य,र) = ल $फ_2$ (य,र) + फ(र) ऐसी स्थिति होगी। यहां फ(र) = ०, $फ_2$(य,र) = ० इनसे जो य और र आवेंगे उनके उत्थापन से अवश्य अब ल के अभिन्न होने से ल $फ_2$ (य,र) + फ(र) = ० ऐसा होगा; इसलिये $ख_1$ $फ_1$(य,र) यह भी शून्य के समान होगा परन्तु यह नहीं कह सकते कि $फ_1$(य,र) =० ऐसा हो क्योंकि संभव है कि $ख_1$ =० हो। इसलिये यहां पर यह विचारणीय है कि कौन य और र के मान ठीक होंगे।

य और र के मान जानने के लिये M. M. Labatie and Sarrus की रीति दिखलाते हैं। महत्तमापवर्त्तन जानने के लिये यदि लब्धि भिन्न आती हो तो ख जो कि र का कोई फल है उससे भाज्य को गुण कर तब भाग दो और शेष में यदि शि जो कि र का फल है इसका निःशेष भाग जाता हो तो उससे भाग दे कर लब्धि को शेष कहो।

२१८—मान लो कि आ = ०, का = ० ये दो समीकरण हैं जिन दोनों में ऐसे कोई गुण खण्ड नहीं हैं जो केवल र के फल हों और आ की अपेक्षा का में य का अल्प घात है। ख गुणक से आ को गुणने से और का का भाग देने से लब्धि क और शेष शिशे जहां शि र का कोई फल है।

फिर शे से का में भाग देने से ऊपर के सब पदार्थ $ख_1$, $ल_1$ $शि_1$, $शे_1$ समझो। इस तरह क्रिया करते करते मान लो कि चौथे बार $शि_3$ और शे=१ तो

$$\left.\begin{array}{l} ख\ आ = ल\ का + शि\ शे \\ ख_1\ का = ल_1\ शे + शि_1\ शे_1 \\ ख_2\ शे = ल_2\ शे_1 + शि_2\ शे_2 \\ ख_3\ शे_1 = ल_3\ शे_2 + शि_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(१)$$

अब मान लो कि ख और शि का महत्तमापवर्त्तन $ग_1$, $\frac{खख_1}{ग}$ और $शि_1$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_1$, $\frac{खख\ ख_2}{गग}$ और $शि_2$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_2$ और $\frac{खख_1ख_2ख_3}{गग_1ग_2}$ और $शि_3$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_3$ है तो

$$\left.\begin{array}{l} \frac{शि}{ग} = 0,\ और\ का = 0 \\ \frac{शि_1}{ग_1} = 0,\ और\ शे = 0 \\ \frac{शि_2}{ग_2} = 0,\ और\ शे_1 = 0 \\ \frac{शि_3}{ग_3} = 0,\ और\ शे_2 = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

इन समीकरणों से य और र के जो मान होंगे वे ही आ = ० और का = ० इन दोनों में भी य और र के मान होंगे।

(१) इन में से पहिले समीकरण में ग का भाग देने से

$$\frac{ख}{ग} आ = \frac{ल}{ग} का + \frac{शि}{ग} शे \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग है; इसलिये $\frac{ख}{ग}$, $\frac{शि}{ग}$ के अभिन्न होने से $\frac{ल}{ग}$ भी अभिन्न होगा क्योंकि ग केवल र का फल है और का में केवल र के फल का गुणखन्ड नहीं है ऐसा पहले ही मान लिया है, इसलिये का और ग परस्पर दृढ़ हैं। (३) से स्पष्ट है कि $\frac{शि}{ग} = 0$, का $= 0$ य और र के जितने मान आवेंगे उनके उत्थापन से $\frac{ख}{ग}$ आ यह भी शून्य होगा परन्तु ग के महत्तमापवर्त्तन होने से $\frac{ख}{ग}$ और $\frac{शि}{ग}$ इनमें अब उभय-निष्ठ गुणखण्ड कोई न होंगे। इसलिये जिस मान में $\frac{शि}{ग}$ शून्य होगा उस मान में $\frac{ख}{ग}$ यह शून्य न होगा; इसलिये (३) के सत्य होने से आ $= 0$ ऐसा होगा; इसलिये $\frac{शि}{ग} = 0$ और का $= 0$ इनमें के सब अव्यक्त मान आ $= 0$, का $= 0$ इनमें भी रहेंगे। (३) के दोनों पक्षों को $ख_1$ से गुण देने से और $ख_1$ का के स्थान में (१) के दूसरे समीकरण का उत्थापन देने से $\frac{ख\, ख_1}{ग}$ आ $= \frac{ख_1\, शि + ल\, ल_1}{ग} शे + \frac{ल}{ग} शि_1\, शे_1$

शि और ल के ग से अभिन्न होने से $\frac{ख_1\, शि + ल\, ल_1}{ग}$ यह अभिन्न होगा और दोनों पक्षों में $ग_1$ के भाग से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि $\frac{ख_1\, शि + ल\, ल_1}{ग\, ग_1}$ यह भी अभिन्न होगा।

$\text{भा} = \frac{\text{ल}}{\text{ग}}$ और $\frac{\text{ल}_1 \text{शि} + \text{ल}\,\text{ल}_1}{\text{ग}\,\text{ग}_1} = \text{भा}_1$ मान लेने से

$$\frac{\text{खख}_1}{\text{गग}_1}\text{आ} = \text{भा}_1\text{शे} + \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}\text{भा}\,\text{शे}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (४)$$

(१) के दूसरे समीकरण को $\frac{\text{ख}}{\text{ग}}$ से गुण देने से

$$\frac{\text{ख}\,\text{ख}_1}{\text{ग}}\text{का} = \frac{\text{ख}\,\text{ल}_1}{\text{ग}}\text{शे} + \frac{\text{ख}}{\text{ग}}\text{शि}_1\,\text{शे}_1$$

ग_1, $\frac{\text{ख}\,\text{ख}_1}{\text{ग}}$ और शि_1 को निःशेष करता है; इसलिये शे के केवल र का फल न होने से $\frac{\text{ख}\,\text{ल}_1}{\text{ग}}$ को भी ग_1 निःशेष करेगा; इसलिये लाघव से $\frac{\text{ख}}{\text{ग}} = \text{ना}$, $\frac{\text{ख}\,\text{ल}_1}{\text{ग}\,\text{ग}_1} = \text{ना}_1$ मान लेने से

$$\frac{\text{ख}\,\text{ख}_1}{\text{ग}\,\text{ग}_1}\text{का} = \text{ना}_1\text{शे} + \frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}\text{ना}\,\text{शे}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (५)$$

(४) और (५) से स्पष्ट है कि $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} = 0$, $\text{शे} = 0$। इनसे य और र के जितने मान होंगे सब के उत्थापन से ऊपर की युक्ति से $\text{आ} = 0$ और $\text{का} = 0$ ठीक रहेंगे; इसलिये $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1} = 0$, $\text{शे} = 0$, इनके सब मूल $\text{आ} = 0$, $\text{का} = 0$ इनमें होंगे।

(४) के दोनों पक्षों को ख_2 से गुण देने से ख_2 का उत्थापन (१) के तीसरे समीकरण से देने से

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1} अ = \left(ल_2 मा_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} मा \right) शे_1 + शि_2 मा_1 शे_2$$

महत्तमापवर्त्तन होने से $ग_2$ प्रथम पक्ष और $शि_2$ को निःशेष करता है; इसलिये ऊपर ही की युक्ति से $ग_2$, $शे_1$ में केवल र का फल गुण खण्ड न होने से, $\left(ला_2 मा_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} मा \right)$ को निःशेष करेगा।

मान लो कि निःशेष करने से लब्धि $मा_2$ है तो

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1 ग_2} अ = मा_2 शे_1 + \frac{शि_2}{ग_2} मा_1 शे_2 \cdots\cdots (६)$$

(५) के दोनों पक्षों का $ख_2$ से गुणा देने से और $ख_2$ शे के स्थान में (१) के तीसरे समीकरण का उत्थापन देने से

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1} का = \left(ल_2 ना_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} ना \right) शे_1 + शि_2 ना_1 शे_2$$

पूर्ववत् फिर सिद्ध कर सकते हो कि $\left(ल_2 ना_1 + \frac{ख_2 शि_1}{ग_1} ना \right)$ यह $ग_2$ से निःशेष होगा और मान लो कि लब्धि $ना_2$ आई तो

$$\frac{ख ख_1 ख_2}{ग ग_1 ग_2} का = ना_2 शे_1 + \frac{शि_2}{ग_2} ना_1 शे_2 \cdots\cdots\cdots (७)$$

(६) और (७) से स्पष्ट है कि $\frac{शि_२}{ग_२} = ०$, $शे_१ = ०$, इनमें जितने अव्यक्त मान होंगे वे सब आ = ० और का = ० इनमें भी होंगे।

इसी प्रकार (६) और (७) के दोनों पक्षों को $ख_३$ से गुण कर और $ख_३$ $शे_२$ का उत्थापन (१) के चौथे समीकरण से देने से पूर्ववत् क्रिया करने से

$$\frac{ख\, ख_१\, ख_२\, ख_३}{ग\, ग_१\, ग_२\, ग_३} आ = मा_३\, शे_२ + \frac{शि_३}{ग_३} मा_२ \quad \ldots\ldots (८)$$

$$\frac{ख\, ख_१\, ख_२\, ख_३}{ग\, ग_१\, ग_२\, ग_३} का = ना_३\, शे_२ + \frac{शि_३}{ग_३} ना_२ \quad \ldots\ldots (९)$$

ऐसे समीकरण बनेंगे जिन से पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि $\frac{शि_३}{ग_३} = ०$ और $शे_२ = ०$ इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब आ = ० और का = ० इनमें भी अव्यक्तमान होंगे। इससे सिद्ध हुआ कि (२) समीकरण परम्परा से जितने अव्यक्तमान आवेंगे सब के उत्थापन से आ = ० और का = ० ये दोनों समीकरण सत्य रहेंगे।

अब इतना और दिखाना है कि आ = ०, का = ०, इनमें जितने अव्यक्तमान होंगे वे सब (२) समीकरण परम्परा के अव्यक्तमानों के अन्तर्गत हैं।

(३) को थोड़ा परिवर्तन करने से

$$ना\, आ - मा\, का = \frac{शि}{ग} शे \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१०)$$

ऐसे लिख सकते हो।

(४) को का और (५) वें को आ से गुण कर घटा देने से

$$(मा_1 का - ना_1 आ) शे + (मा का - ना आ) \frac{शि_1}{ग_1} शे_1 = 0$$

(१०) वें से

$$(मा_1 का - ना_1 आ) शे - \frac{शि\, शि_1}{ग\, ग_1} शे\, शे_1 = 0$$

इसलिये

$$मा_1 का - ना_1 आ = \frac{शि\, शि_1}{ग\, ग_1} शे_1 \qquad (११)$$

(६) वें को का से और (७) वें को आ से गुण कर घटा देने से

$$(मा_2 का - ना_2 आ) शे_1 + (मा_1 का - ना_1 आ) \frac{शि_2}{ग_2} शे_2 = 0$$

और (११) वें से

$$(मा_2 का - ना_2 आ) शे_1 + \frac{शि शि_1 शि_2}{ग ग_1 ग_2} शे_1 शे_2$$

इसलिये

$$मा_2 का - ना_2 आ = - \frac{शि शि_1 शि_2}{ग ग_1 ग_2} शे_2 \qquad (१२)$$

इसी प्रकार (८) वें और (९) वें से

$$मा_3 का - ना_3 आ = \frac{शि शि_1 शि_2 शि_3}{ग ग_1 ग_2 ग_3} \qquad (१३)$$

(१३) वें से स्पष्ट है कि जितने य और र के मान में आ

और ग₃ शून्य होंगे उतने मानों में $\frac{शि शि_1 शि_2 शि_3}{ग ग_1 ग_2 ग_3}$ यह भी शून्य होगा; इसलिये इसके गुण खण्डों $\frac{शि}{ग}, \frac{शि_1}{ग_1}, \frac{शि_2}{ग_2}$ और $\frac{शि_3}{ग_3}$ में एक एक अवश्य शून्य होंगे।

इसलिये $\frac{शि}{ग}=0, \frac{शि_1}{ग_1}=0, \frac{शि_2}{ग_2}=0$ और $\frac{शि_3}{ग_3}=0$, इनसे जितने र के मान आवेंगे उनके अन्तर्गत ही श्रा=० और का=० के र के मान होंगे।

कल्पना करो कि जब य=श्र, और र=क तब श्रा=० और का=० ये ठीक हो जाते हैं तो यदि $\frac{शि}{ग}=0$ इसमें भी एक मान क हो तो य=श्र, और र=क में $\frac{शि}{ग}=0$ और का=० ऐसा होगा।

यदि क, $\frac{शि}{ग}=0$ इसमें का अव्यक्त मान न हो किन्तु $\frac{शि_1}{ग_1}=0$ इसमें का एक अव्यक्त मान हो तो क के उत्थापन से $\frac{शि}{ग}$ के न शून्य होने से (१०) वें से य=० और र=क में $\frac{शि_1}{ग_1}=0$ और शे = ० होगा।

यदि क, $\frac{शि}{ग}=0, \frac{शि_1}{ग_1}=0$, इन दोनों में अव्यक्त मान न हो किन्तु $\frac{शि_2}{ग_2}=0$ इसमें का एक अव्यक्त मान हो तो ऊपर ही

की युक्ति से और (११) वें से य = अ, और र = क में $\frac{शि_2}{ग_2} = ०$

और शे$_1$ = ० होगा।

फिर कल्पना करो कि क, $\frac{शि}{ग} = ०, \frac{शि_1}{ग_1} = ०, \frac{शि_2}{ग_2} = ०$

इन में का अव्यक्त मान नहीं है किन्तु $\frac{शि_3}{ग_3} = ०$ इसमें का एक अव्यक्त मान है तो य = अ और र = क में (१२) वें से $\frac{शि_3}{ग_3} = ०$ और शे$_2$ = ० होगा। इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो आती है।

$\frac{शि}{ग} \frac{शि_1}{ग_1} \frac{शि_2}{ग_2} \frac{शि_3}{ग_3} = ०$ इस समीकरण को जिस पर से र के सब मान आते हैं र के रूप में प्रधान समीकरण कहते हैं।

उदाहरण

१। (र—१) य^2 + र य + र^2 — २ र = ०, (र — १) य + र = ०

इन में य और र का मान बताओ।

यहां आ = (र — १) य^2 + र य + र^2 — २ र

का = (र — १) य + र

ख = १, ल = य, शि = र^2 — २ र, शे = ०

∴ ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग = १

(२) समीकरण परम्परा से

$\frac{शि}{ग} = र^२ - २र = ०$ और का $= (र - १)\ य + र = ०$ इन से य और र का मान जान लो।

२। $(र - १)\ य^३ + र\,(र + १)\ य^२ + (३\ र^२ + र - २)य$
$+ २र = ०$ ....(१)

और $(र - १)\ य^२ + र\,(र + १)\ य + ३\ र^२ - १ = ०$ ......(२)

इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

(१) को आ और (२) को का कहो तो

ख $= १$, ल $=$ य, शिशे $= (र - १)\ य + २र$ ∴ शि $= १$ और शे $= (र - १)\ य + २र$।

फिर $ख_१ = १$, $ल_१ = य + र$, $शि_१\ शे_१ = र^२ - १$ ∴ $शि_१ = र^२ - १$, $शे_१ = १$।

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग $= १$, परन्तु र के न रहने से यह व्यर्थ है।

$\frac{खख_१}{ग} = \frac{१}{१} = १$ और $शि_१ = र^२ - १$ का महत्तमापवर्त्तन

$ग_१ = १$

इसलिये $\frac{शि_१}{ग_१} = र^२ - १ = ०$, शे $= (र - १)\ य + २र = ०$।

इन पर से य और र के मान जान लो।

३। $रय^२ - (र^२ - ३र - १)य + र = ०$, $य^२ - र^२ + ३ = ०$

इनमें ख$=१$, ल$=$रय, शि$=१$, शे$=$य$+$र।

$ख_१=१,\ ल_१=य-र,\ शि_१=१,\ शे_१=१$

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन $ग=१$ और $\frac{खख_१}{ग}=१$ और

$शि_१=१$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_१=१$, इसलिये यहाँ $\frac{शि}{ग}=१=०$ यह

असंभव और $\frac{शि_१}{ग_१}=१=०$ यह भी असंभव होने से कहेंगे कि

प्रश्न खिल है।

४। $य^३+३रय^२-३य^२+३र^२य-६रय-य+र^३-३र^२$
$-र+३=०=आ$,

और $य^३-३रय^२+३य^२+३र^२य-६रय-य-र^३+३र^२$
$+र-३=०=का$

इनमें $ख=१$, पहिला शेष अर्थात् $शिशे=$
$२(र-१)\ (३य^२र^२-२र-३)$

$\therefore\ शि=र-१,\ शे=३य^२+र^२-२र-३$।

$ख_१=२,\ शि_१शे_१=८(र^२-२र)य,\quad \therefore\ शि_१=र^२-२र, शे_१=८य$

$ख_२=८,\ शि_२शे_२=र^२-२र-३\quad\quad \therefore\quad शि_२=र^२-२र-३$,

$शे_२=१,\ ख=१$ और $शि=र-१$ का महत्तमापवर्त्तन $ग=१$ और

$\frac{खख_१}{ग}=२$ और

$शि_१=र^२-२र$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_१=१$ और $\frac{खख_१ख_२}{गग_१}$

=१ × ३ × ८=२४ का और शि$_2$=र^2—२र—३ का महत्तमापवर्त्तन ग$_2$=१ हुआ।

इसलिये $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}$=र—१=०, का=०, $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}$=र^2—२र=०, शे

=३य^2+र^2—२र—३=० और $\frac{\text{शि}_2}{\text{ग}_2}$ =र^2—२र—३ =०; शे$_1$

=८य वा य=०

और प्रधान समीकरण र के रूप में

(र—१)(र^2—२र)(र^2—२र—३)=० यह हुआ।

५। (र—२) य^2—२य+४र—२=०=आ

और रय^2—४य+४र=०=का इनमें य और र के लिये समीकरण परम्परा बनाओ।

यहां आ को र से गुणकर तब का के भाग देने से ल अभिन्न आता है; इसलिये ख=र और शि शे=(३र—१०)य+र^2+६र ∴ शि=१, शे=(३र—१०)य+र^2+६र। शे का भाग का में देने के लिये और ल$_1$ को अभिन्न होने के लिये का को पहिले ३र—१० से गुण देने से फिर ३र—१० से गुण देने से अर्थात् का को (३र—१०)^2 से गुण देने से ख$_1$=(३र—१०)^2,

शि$_1$शे$_1$=र^5+१२र^4+८७र^3—२००र^2+१००र।

इसलिये शि$_1$=र^5+१२र^4+८७र^3—२००र^2+१००र और शे$_1$=१।

ख और शि का महत्तमापवर्त्तन ग=१। और $\frac{\text{ख ख}_1}{\text{ग}}$=

$\frac{र(३र-१०)^2}{१}=र(३र-१०)^2$ और शि, का महत्तमापवर्त्तन $ग_१=र$ है ।

इसलिये $\frac{शि}{ग}=\frac{१}{१}=१=०$ असंभव होने से

$$\frac{शि_१}{ग_१}=\frac{र^५+१२र^४+८७र^३-२००र^२+१००र}{र}$$

$=र^४+१२र^३+८७र^२-२००र+१००=०$, शे $=$
$(३र-१०)य+र^२+६र=०$

इनसे य और र के मान विदित हो जायंगे ।

२२० । २१६ प्रक्रम के (३) से जब सिद्ध है कि $\frac{ल}{ग}$ यह अभिन्न ल' के बराबर होगा तब कह सकते हो कि ख का एक छोटा मान ऐसा हो सकता है कि जिसके वश से सर्वदा $ग=१$ हो । इसी प्रकार $ख_१$, $ख_२$ ......के मान ऐसे ले सकते हैं जिसमें $ख_१$, और $शि_२$ का, $ख_२$ और $शि_२$ का, इत्यादि का महत्तमापवर्त्तन १ ही हो । इसलिये $\frac{ख ख_१}{ग}$ और $शि_१$ का महत्तमापवर्त्तन $=ग_१$ ($ग=१$ और $ख_१$ और $शि_१$ के परस्पर दृढ़ होने से) वही होगा जो कि ख और $शि_१$ को होगा । और $\frac{ख ख_१}{ग_१}$ और $शि_२$ का महत्तमापवर्त्तन $ग_२$ होगा । इस प्रकार आगे भी जान लेना चाहिए ।

यदि अन्त में शि जैसा कि २१६ वें प्रक्रम में मान लिया

है कि शि$_{३}$ यह य से स्वतन्त्र है, शून्य के तुल्य होता शे$_{२}$ यह आ और का का महत्तमापवर्त्तन होगा। इसलिये शे$_{२}$=० इस पर से २१७ प्रक्रम की युक्ति से य और र के अनन्त मान आ सकते हैं, और $\frac{आ}{श_२}=०$, और $\frac{का}{श_२}=०$ इन समीकरणों से पूर्ववत् क्रिया करने से य और र के परिमित मान भी आवेंगे और तब (२) की समीकरण परम्परा में श$_{२}$ के भाग दे देने से

$\frac{शि}{ग}=०$ और $\frac{का}{शे_२}=०$, $\frac{शि_१}{ग_१}=०$ और $\frac{शे}{शे_२}=०$, $\frac{शि_२}{ग_२}=०$ और $\frac{शे_१}{शे_२}=०$

इनसे य और र के उन परिमित मानों का प॰ा लगा सकते हो।

जैसे $य^३+रय^२-(र^२+१)य+र-र^३=०=आ$

$य^३-रय^२-(र^२+६र+६)य+र^३+६र^२+६र=०=का$

यहां का से आ में भाग देने से ल=१ और पहिला शेष

$=२\{रय^२+(३र+४)य-(र^३+३र^२+४र)$

इसलिये शि=२, शे=$रय^२+(३र+४)य-(र^३+३र^२+४र)$

शे से का में भाग देने में का को र से गुण देने से फिर एक बार भाग दे देने पर अभिन्न लब्धि के लिये र से गुण देने से अर्थात् का को $र^२$ से गुण देने से।

$ग_१=र^२$, शि$_१$शे$_१$$=८(र^२+३र+२)(य-र)$

इसलिये शि$_१$$=८(र^२+३र+२)$ और शे$_१$=य−र

$शे_1$ से शे में भाग देने से शेष कुछ नहीं बचता इसलिये $शि_2=0$ तब ऊपर की क्रिया से $शे_1=य-र=0$ इस पर से य और र के अनेक मान आवेंगे और $\frac{शि_1}{ग_1}=८(र^2+३र+२)=0$

वा $र^2+३र+२=0$ और $\frac{शे}{शे_1}=यर+र^2+३र+४=0$ इनसे परिमित य और र भी आवेंगे।

२१८ प्रक्रम की क्रिया में यह मान लिया गया है कि य और र के अनन्त मान नहीं हैं। अर्थात् आ और का के महत्तमापवर्त्तन से आ और का को भाग देकर जो लब्धि आवे उसे आ और का के स्थान में रख कर तब २१८ वें प्रक्रम से सर्वदा क्रिया का आरम्भ करो।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। सिद्ध करो कि $य+र=0$, $य^2-र^2+१=0$ ऐसे दो समीकरण नहीं हो सकते।

२। $य+र-४=0$, $य^४+र^४-८२=0$ इनमें य और र के मान बताओ।

यहाँ $शि=(४-र)^४+र^४-८२$, $ख=१$

$\therefore \frac{शि}{ग}=(४-र)^४+र^४-८२=0$, $का=य+र-४=0$

३। $य^2+यर+र^2-४९=0$, $य^४+य^2र^2+र^४-९११=0$ इनमें य और र के मान बताओ।

यहाँ $ख=१$, $शि=-९८$, $शे=यर-१५$, $ख_1र^2$,

$शि_1=र^४-१५र^2+२२५$,

शे$_1$ = १, ख और शि का महत्तमापवर्तन ग = १,

$\frac{\text{ख ख}_1}{\text{ग}}$ = र^3, शि$_1$ = र^4 − ३४र^2 + २२५ का महत्तमापवर्तन ग$_1$ = १

∴ $\frac{\text{शि}_1}{\text{ग}_1}$ = र^4 − ३४ र^2 + २२५ = ० और शे = य र − १५ = ०

४। य^2 + र^2 − (य + र) − अ = ०, य^4 + र^4 + य + र − २(य^3 + र^3) − क = ० इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहाँ ख = १, शि = २ (र^2 − र − अ)^2 + २अ (र^2 − र − अ) + अ^2 − अ − क, शे = १, ख और शि का महात्तमापवर्तन ग = १

∴ $\frac{\text{शि}}{\text{ग}}$ = २ (र^2 − र − अ)^2 + २अ (र^2 − र − अ) + अ^2 − अ − क = ०

और का = य^2 + र^2 − (य + र) − अ = ०

यदि समीकरण को तोड़ कर अव्यक्त के मान ले आओ तो

य (य − १) = ½ {अ ± √(२ अ + २ क − अ^2)}

र (र − १) = ½ {अ ∓ √(२ अ + २ क − अ^2)}

५। य^3 + २र य^2 + (३र^2 − र + १)य + र^3 − र^2 + २र = ०,

य^2 + २र य + र^2 − र = ०, इनमें य और र के मान के लिये समीकरण बनाओ।

यहां र^2 − र = ०, य + २र = ० ऐसे समीकरण बनेंगे।

६। य^3 + ३र य^2 + ३र(र − २)य + र^3 − ४ = ०

य^2 + २र य + २र^2 − ३र + २ = ० इनमें य और र के मान जानने के लिये समीकरण बनाओ।

यहां $र-२=०$, $य^{२}-२रय+२र^{२}-४र+२=०$ और $र^{२}-५र+६=०$, $य+र+२=०$ ऐसे समीकरण बनेंगे। और र के रूप में प्रधान समीकरण

$$(र-२)(र^{२}-५र+६)=० \text{ ऐसा होगा ।}$$

१७—प्रकीर्णक ।

२२१। चलस्पर्द्धी, अचलस्पर्द्धी ।

१२६ वें प्रक्रम में जो $स_{न}$ का मान है उसे लाघव से

$$(अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots\ldots, अ_{न})(य, १)^{न}$$

इस सङ्केत से प्रकाश करते हैं।

इसी प्रकार $(अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots\ldots, अ_{न})(य, र)^{न}$

$$= अ_{०}य^{न} + न\, अ_{१}य^{न-१}र + \frac{न(न-१)}{२!} अ_{२}य^{न-२}र^{२}$$

$+ \ldots\ldots + न\, अ_{न-१}य\, र^{न-१} + अ_{न} र^{न}$ ऐसा मान सकते हो।

$स_{न} = (अ_{०}, अ_{१}, अ_{२} \ldots\ldots न_{न})(य, १)^{न}$ इसमें अव्यक्त मान क्रम से $इ_{१}, इ_{२}, इ_{३}, \ldots\ldots इ_{न}$ समझो तो यदि इनके अन्तर से बना एक तद्रूप और भुजशक्तिक फल फा हो जिसमें सोपान की संख्या सो हो तो फा में $इ_{१}, इ_{२}, \ldots\ldots इ_{न}$ के स्थान में

$\frac{१}{इ_{१}-य}, \frac{१}{इ_{२}-य}, \ldots\ldots \frac{१}{इ_{न}-य}$ इनके उत्थापन से जो फा का

मान हो उसे अभिन्न करने के लिये $स_न^{सो}$ इससे गुण देनेसे यदि गुणनफल में य रहे तो गुणनफल को $स_न$ का चलस्पर्द्धी और यदि य न रहे तो उसे $स_न$ का अचलस्पर्द्धी कहते हैं।

यदि फा में प्रत्येक अव्यक्तमान का समान ही घात सो हो तो ऊपर की परिभाषा से $स_न$ का अचलस्पर्द्धी $अ_०^{सो}$ फा($अ_१$, $अ_२$, ... $अ_न$) ऐसा होगा।

यदि स =०, स =०, $स_भ$ =० इत्यादि के मूलों के अन्तर का तद्रूपफल फा हो जिनमें सो, सो′, सो″ इत्यादि सोपान हों तो ऊपर की परिभाषा से प्रत्येक अव्यक्त मान इ इत्यादि के स्थानमें $\frac{१}{इ-य}$ इत्यादि के उत्थापन से और अभिन्न के लिये। $स_प^{सो} स_ब^{सो'} स_भ^{सो''}$

इत्यादि से गुण देने से यदि गुणन फल में य रहे तो $स_प$ $स_ब$ $स_भ$ इत्यादि परम्परा का चलस्पर्शी और य न रहे तो उन्हीं परम्परा का वह गुणन फल अचलस्पर्शी होगा। (सोपान के लिये १६९ वाँ प्रक्रम देखो)

२२१। कल्पना करो कि

$अ^{सो}$ फा ($इ_१$, $इ_२$, $इ_३$, ... $इ_न$) = फि $अ_०$, $अ_१$, $अ_२$, $अ_३$, ... $अ_न$ इनमें अव्यक्त मानों $इ_१$, $इ_२$ इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मान के उत्थापन से और $अ_०$, $अ_१$, $अ_२$,... इत्यादि के स्थानों में

$अ_न, अ_{न-१}, अ_{न-२}$ इत्यादि के उत्थापन से $अ_०^{सो}$ $फि(इ_१, इ_२, \ldots इ_न)$ $=$ $फी(अ_न, अ_{न-१}, अ_{न-२}, \ldots\ldots अ_०)$ जहाँ अव्यक्त मानों का कोई तद्रूप फल फि है और फी तत्संबन्धी समीकरण के गुणकों के रूप में मान है।

अब फिर $इ_१, इ_२, \ldots\ldots$ इत्यादि के स्थान में $इ_१-य, इ_२-य, \ldots\ldots इ_न-य$ इत्यादि के उत्थान से और $अ_न, अ_{न-१} \ldots$ इत्यादि के स्थानों में १२८ वें प्रक्रम से $स_न, स_{न-१} \ldots$ इत्यादि के उत्थापन से $स_न$ का चलस्पर्शी

$अ_०^{सो}$ $फि(इ_१-य, इ_२-य, \ldots इ_न-य) = फि(स_न, स_{न-१}, \ldots स_१, स_०)$ ऐसा होगा। जैसे

$$१। \quad स_३ = अ_० य^३ + ३ अ_१ य^२ + ३ अ_२ य + अ_३ = ०$$

इसमें यदि य के मान $इ_१, इ_२, इ_३$ मान लो तो इनके अन्तर का फल

$$फा = अ_०^२ \{ (इ_१ - इ_२)^२ + (इ_१ - इ_३)^२ + (इ_२ - इ_३)^२ \}$$

ऐसा हो तो १७१ वें प्रक्रम से

$$फा = १८ (अ_१^२ - अ_० अ_२)।$$

इसलिये मानों को उनके हरात्मक मानों में बदल देने से और $अ_०, अ_१, \ldots$ इत्यादि के स्थानों में $अ_न, अ_{न-१}, \ldots$ के रखने से

$$अ_३^{२२} \left\{ \frac{इ_३^२(इ_२ - इ_१)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} + \frac{इ_२^२(इ_३ - इ_१)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} + \frac{इ_१^२(इ_३ - इ_२)^२}{इ_१^२ इ_२^२ इ_३^२} \right\}$$

$$= अ_०^२ \{ इ_३^२ (इ_२ - इ_१)^२ + इ_२^२ (इ_३ - इ_१)^२ + इ_१^२ (इ_३ - इ_२)^२ \}$$

$=१८\ (अ^२_{न-१}—अ_न अ_{न-२})=१८\ (अ^२_२—अ_१ अ_३)$

इसमें $इ_१, इ_२, इ_३$ इनके स्थान में $इ_१—य, इ_२—य, इ_३—य$ इनके उत्थापन से

$$अ^२_० \{ (इ_३—य)^२(इ_२—इ_१)^२+(इ_२—य)^२(इ_३—इ_१)+ (इ_१—य)^२(इ_३—इ_२)^२ \}=१८\ (स^२_२—स_१ स_३)$$

इसके दूसरे पक्ष में $स_२, स_१, स_३$ इनका उत्थान १२६ वें प्रक्रम से देने से और लाघव के लिये १८ को निकाल देने से

$स^२_२-स_१ स_३=(अ_० अ_२—अ^२_१)य^२+(अ_० अ_३—अ_१ अ_२)य+ (अ_१ अ_३—अ^२_२)$ यह $स_३$ का चलस्पर्द्धी हुआ।

२। इसी प्रकार चतुर्घात समीकरण में अर्थात् $स_४=०$ इस में यदि य के मान $इ_१, इ_२, इ_३, इ_४$ हों और इन के अन्तर का फल=**फा**$=अ^२_०$ यो$(इ_२-इ_३)^२\ (इ_२—इ_४)^२$तो १७१ वें प्रक्रम से

फा$=२४\ (अ_४ अ_०-४अ_३ अ_१+३अ^२_२)=२४$ झा (१२२ प्र. देखो)। इसमें $इ_१, इ_२$, इत्यादि के स्थानों में उनके हरात्मक मानों का और $अ_०, अ_१,...$ इत्यादि के स्थानों में उनके स्पर्द्धी $अ_न, अ_{न-१}...$इत्यादि का उत्थापन दें तो **फा** ज्यों का त्यों रहता है; इसलिये यहां **फा**=फि, पुनः फि में $इ_१, इ_२,\cdots$इत्यादि के स्थानों में $इ_१—य, इ_२—य...$इत्यादि के उत्थापन से भी अन्तर करने से $इ_१, इ_२\cdots$इत्यादि के अन्तर के रहने से और य के न रहने से $स_४$ का अचलस्पर्द्धी $अ_४ अ_०-४अ_३ अ_१+३अ^२_२$=झा यह होगा।

३। इसी प्रकार यदि चतुर्घात समीकरण $स_४=०$ इसमें

$$\text{फा} = \text{अ}_0^3\{(\text{इ}_3 - \text{इ}_1)(\text{इ}_2 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_1 - \text{इ}_3)(\text{इ}_3 - \text{इ}_4)\}$$
$$\{(\text{इ}_1 - \text{इ}_2)(\text{इ}_3 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_2 - \text{इ}_3)(\text{इ}_1 - \text{इ}_4)\}$$
$$\{(\text{इ}_2 - \text{इ}_3)(\text{इ}_1 - \text{इ}_4) - (\text{इ}_3 - \text{इ}_1)(\text{इ}_2 - \text{इ}_4)\}$$

$$= -४३२\,\text{अ}_0\text{अ}_2\text{अ}_4 + २\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3 - \text{अ}_0\text{अ}_3^2 - \text{अ}_1^2\text{अ}_4 - \text{अ}_2^3\}$$

= छा (१२२ वां प्र. देखो)

तो यही स_4 का अचलस्पर्द्धी होगा।

२२२। चलस्पर्द्धी वा अचलस्पर्द्धी में अव्यक्त मानों के ध्रुव शक्तिक फल **फा** होता है और उनके अन्तर का भी यही फल होता है। इसलिये चलस्पर्द्धी का रूप

$$\frac{\text{स}^{\text{सो}}}{\text{य}^{\text{ध्रु}}}\,\text{फा}\left(\frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \ldots\ldots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_न - \text{य}}\right)$$ ऐसा हो सकता है जहाँ

सो सोपान और ध्रु ध्रुवशक्ति का द्योतक है।

अव्यक्त के मानों के अन्तर का फल **फा** होने से प्रत्येक ध्रुव $\frac{\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}$ इत्यादि में एक जोड़ने से भी **फा** में भेद न होगा; इसलिये १ जोड़ने से और प्रत्येक को य से गुण और भाग देने से चलस्पर्द्धी

$$\frac{\text{स}^{\text{सो}}}{\text{य}^{\text{ध्रु}}}\,\text{फा}\left(\frac{\text{इ}_1\text{य}}{\text{इ}_1 - \text{य}}, \frac{\text{इ}_2\text{य}}{\text{इ}_2 - \text{य}}, \ldots\ldots, \frac{\text{इ}_न\text{य}}{\text{इ}_न - \text{य}}\right)$$ ऐसा होगा।

जिसका लघुतम रूप

$$(-१)^{\text{धु}}\, \text{स}_{\text{ख}}^{\text{सो}}\, \text{य}^{\text{नसो}-२\text{धु}}\ \text{फा}\left(\frac{१}{\frac{१}{\text{इ}_१}-\frac{१}{\text{य}}}, \frac{१}{\frac{१}{\text{इ}_१}-\text{य}}, \ldots\ldots, \frac{१}{\frac{१}{\text{इ}_\text{न}}-\text{य}}\right)$$

ऐसा होगा जहाँ

$$\text{स}_{\text{ख}} = \text{अ}_\text{न}\left(\frac{१}{\text{य}}-\frac{१}{\text{इ}_१}\right)\left(\frac{१}{\text{य}}-\frac{१}{\text{इ}_२}\right)\cdots\cdots\left(\frac{१}{\text{य}}-\frac{१}{\text{इ}_\text{न}}\right)।$$

इस पर से सिद्ध होता है कि

$$\text{चलस्पद्ध}\ \frac{\text{स}^{\text{सो}}}{\text{य}^{\text{धु}}}\ \text{फा}\left(\frac{\text{य}}{\text{इ}_१-\text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{इ}_१-\text{य}}, \frac{\text{य}}{\text{य}_२-\text{य}}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_\text{न}-\text{य}}\right)$$

$$= \text{स}^{\text{सो}}\ \text{फा}\left(\frac{१}{\text{इ}_१-\text{य}}, \frac{१}{\text{इ}_२-\text{य}}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\text{य}}{\text{इ}_\text{न}-\text{य}}\right)$$

यह अविकृत रहता है यदि $\text{इ}_१, \text{इ}_२, \cdots, \text{इ}_\text{न}$, य इनके स्थान में इनके हरात्मक मानों का उत्थापन दें और $\text{अ}_०, \text{अ}_१, \text{अ}_२, \cdots \text{अ}_\text{न}$ इनके स्थान में $\text{अ}_\text{न}, \text{अ}_{\text{न}-१}, \text{अ}_{\text{न}-२}, \ldots\ldots \text{अ}_०$ का उत्थापन दें और उत्पन्न फल को $(-१)^{\text{धु}}\, \text{य}^{\text{न सो}-२\text{धु}}$ इससे गुण दें।

इसलिये यदि म घात के किसी चलस्पर्द्धी का पद

$(\text{का}_0, \text{का}_1, \text{का}_2, \ldots \text{का}_{\text{म}})\ (\text{य}, 1)^{\text{म}}$ ....(१)

ऐसा हो तो $\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_{\text{न}}$, य के स्थान में $\text{अ}_{\text{न}}, {}_{\text{न}-1}, \ldots\ldots, \text{अ}_0$, $\frac{1}{\text{य}}$ के उत्थापन से वही

$$(-1)^{\text{ध्रु}}\text{य}^{\text{न से}-2\text{ ध्रु}}\ (\text{खा}_0, \text{खा}_1, \ldots \text{खा}_{\text{म}})\left(\tfrac{1}{\text{य}}, 1\right)^{\text{म}} \ldots\ldots (२)$$

इस रूप का होगा। इसे (१) के साथ तुलना करने से

$$\text{म}=\text{न से}-2\text{ध्रु},\ \text{का}_0=(-1)^{\text{ध्रु}}\text{खा}_{\text{म}}, \ldots\ldots\ \text{का}_{\text{त}}=(-1)^{\text{ध्रु}}\text{खा}_{\text{म}-\text{त}} \ldots\ldots (३)$$

(२) को (१) का संबद्ध कहते हैं और (१) को (२) का संबद्ध कहते हैं।

(३) से सिद्ध होता है कि यदि (१) के किसी पद का गुणक

$\text{फी}\ (\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots \text{अ}_{\text{न}})=\text{का}_{\text{त}}$ हो तो इसके संबद्ध रूप

$\text{खा}_{\text{म}-\text{त}} = \text{फी}\ (\text{अ}_{\text{न}}, \text{अ}_{\text{न}-1}, \ldots\ldots \text{अ}_0)\ (-1)^{\text{ध्रु}}$ यह होगा

(१) यदि $\text{अ}_0^{\text{से}}$ फा यह अचलस्पर्द्धी हो तो इसका संबद्ध भी अचलस्पर्द्धी होगा; इसलिये $\text{म}=0=\text{नसे}-2\text{ध्रु}\ \therefore\ \text{नसे}=2\text{ध्रु}$

(२) विषमघात समीकरण के अचलस्पर्द्धी में सम सोपान रहेगा। क्योंकि (१) से यहां पर $\text{नसे}=2\text{ध्रु}$ ऐसा होगा। परन्तु न विषम है, इसलिये से अवश्य सम होगा। और ध्रु न का अपवर्त्य होगा।

(३) समघात समीकरण का चलस्पर्द्धी भी समघात का होगा। क्योंकि न के सम होने से चलस्पर्द्धी का घात

$\text{म} = \text{न सो} - \text{२ध्रु}$ यह भी सम ही होगा।

(४) दो चलस्पर्द्धियों का प्रत्युत्पन्न भी सम ही घात का मुख्य समीकरण के पद गुणकों के रूप में होगा। क्योंकि प्रत्युत्पन्न के घात की संख्या यदि दोनों चलस्पर्द्धियों में सोपान और ध्रुवशक्ति को क्रम से सो, सो;' ध्रु, ध्रु' मानो तो

$$\text{सो}(\text{नसो}' - \text{२ध्रु}') + \text{सो}'(\text{नसो} - \text{२ध्रु} = \text{२}(\text{नसोसो}' - \text{सोध्रु}' - \text{सो}'\text{ध्रु})$$

यही होगी जो सम है।

उदाहरण।

१। दिखलाओ कि दो समीकरणों का प्रत्युत्पन्न उन दोनों का अचलस्पर्द्धी है। (२१६ प्र० देखो)

२। यदि $\text{स} = \text{अय}^{३} + \text{३अय}^{२} + \text{३खय} + \text{ग} = 0$ इसमें अव्यक्त मान $\text{अ}_{१}, \text{अ}_{२}, \text{अ}_{३}$ हों और $\text{स}' = \text{अ}'\text{य}^{२} + \text{२क}'\text{य} + \text{ख}' = 0$ इसमें अव्यक्तमान $\text{अ}'_{१}, \text{अ}'_{२}$ हों तो

$$(\text{अ}_{२} - \text{अ}_{३})^{२} (\text{अ}_{१} - \text{अ}'_{१}) (\text{अ}_{१} - \text{अ}'_{२}) + (\text{अ}_{३} - \text{अ}_{१})^{२}$$
$$(\text{अ}_{२} - \text{अ}'_{१}) (\text{अ}_{२} - \text{अ}'_{२}) + (\text{अ}_{१} - \text{अ}_{२})^{२} (\text{अ}_{३} - \text{अ}'_{१})$$

$(\text{अ}_{३} - \text{अ}'_{२}) = \text{फ}$ इसका मान समीकरण के पद गुणकों के फल में ले आवो।

यहां १६८ वें प्रक्रम से

$$-\text{अ}^{२}\text{अ}'\text{फ} = \text{६}\{\text{अ}'(\text{कग} - \text{ख}^{२}) - \text{क}'(\text{अग} - \text{कख}) + \text{ख}'(\text{अख} - \text{क}^{२})\}$$

२२० वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से दोनों समीकरणों का यही चलस्पर्द्धी होगा ।

२२३ । (अ$_{०}$, अ$_{१}$, अ$_{२}$, ······अ$_{न}$) (य, १)^{न}=० इसमें अव्यक्त मान इ$_{१}$, इ$_{२}$ ······इ$_{न}$ हों तो

$$अ_{०}^{सो} फा (इ_{१}, इ_{२}, \cdots\cdots, इ_{न}) = फी (अ_{०}, अ_{१}, \ldots\ldots अ_{न})$$

इसमें इ$_{१}$, इ$_{२}$,······इ$_{न}$ के स्थान में इ$_{१}$—य, इ$_{२}$—य,······ इ$_{न}$—य इत्यादि के उत्थापन देने से १८६ वें प्रक्रम से

$$अ_{०}^{सो} फा (इ_{१}-य, इ_{२}-य, \ldots\ldots, इ_{न}-य)$$

$$= फी (स_{०}, स_{१}, स_{२}, \ldots\ldots\ldots, स_{न})$$

चलनकलन के ६८ वें प्रक्रम से और फी में य^{२} इत्यादि के छोड़ देने से

स$_{०}$ = अ$_{०}$, स$_{१}$=अ$_{१}$ + अ$_{०}$य, स$_{२}$=अ$_{२}$ + २अ$_{१}$य,······

स$_{न}$=अ$_{न}$ + नअ$_{न-१}$य ऐसा मानने से $\frac{ता\ फा}{ता\ इ_{१}} + \frac{ता\ फा}{ता\ इ_{१}} + \frac{ता\ फा}{ता\ इ_{२}} +$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{ता\ फा}{ता\ इ_{न}} = \left(\frac{ता}{ता\ इ_{१}} + \frac{ता}{ता\ इ_{२}} + \cdots\cdots + \frac{ता}{ता\ इ_{न}}\right) फा$$

इस सङ्केत से प्रकाश करने से और $\frac{ता}{ता\ इ_{१}} + \frac{ता}{ता\ इ_{२}} + \cdots\cdots + \frac{ता}{ता\ इ_{न}} = -$त्रि मान लेने से और

$$अ_{०}\frac{ता\ फी}{ता\ अ_{१}} + २\ अ_{१}\frac{ता\ फी}{ता\ अ_{२}} + ३\ अ_{२}\frac{ता\ फी}{ता\ अ_{३}} + \cdots\cdots\cdots + न\ अ_{न-१}\frac{ता\ फी}{ता\ अ_{न}}$$

$$=\left(अ_0 \frac{ता}{ता\ अ_1} + २\ अ_1 \frac{ता}{ता\ अ_2} + \cdots\cdots +\right.$$

$$\left. न\ अ_{न-१} \frac{ता}{ता\ अ_न}\right) फी$$ और

$$अ_0 \frac{ता}{ता\ अ_1} + २\ अ_2 \frac{ता}{ता\ अ_2} + \cdots\cdots\cdots +$$

$$न\ अ_{न-१} \frac{ता}{ता\ अ_न} = वी$$

ऐसा हो तो यदि $फा_0 = फा\ (इ_1, इ_2, इ_3, \ldots\ldots इ_न)$

और $फी_0 = फी\ (अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_न)$

$$तो \overset{सो}{\underset{अ_0}{}} \left(फा_0 + य\ त्रि\ फा_0 + \frac{य^2}{१ \cdot २} वि^2 फा_0 + \cdots\cdots\right)$$

$=फी_0 + य\ वी\ फी_0 + \ldots\ldots$ दोनों समीकरणों में य के गुणक मान करने से

$$\overset{सो}{अ_0}\ वि\ फा\ (इ_1, इ_2, \ldots\ldots इ_न) =$$
$$वी\ फी\ (अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)$$

यह समीकरण दिखलाता है कि फा के त्रि से अव्यक्त मानों के रूप में जो तद्रूप फल होगा वही फी के वी से समीकरण के पदगुणकों के रूप में आवेगा।

फा और फी के स्थान में वि फा और वी फी के लेनेसे ऊपर ही की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि $त्रि^2 फा = वी^2 फी$, इत्यादि उत्पन्न होंगे।

यदि वि फा=० तो वि^{२}फा इत्यादि भी शून्य होंगे; इसलिये ऐसी स्थिति में

फा (इ$_{१}$—य, इ$_{२}$—य,..... इ$_{न}$—य) इसमें य का नाश हो जायगा, परन्तु य का न रहना तभी संभव है जब कि फा (इ$_{१}$, इ$_{२}$, इ$_{३}$,......इ$_{न}$) यह अव्यक्तमानों के अन्तर का फल हो। इस पर से सिद्ध होता है कि यदि अ$_{०}^{सो}$ फा$_{०}$=वी फी$_{०}$=० वा अ$_{०}^{-सो}$ वी फी=० तो कहेंगे कि अव्यक्तमानों के उत्तर का फल यह फा है। जैसे

उदाहरण

१। अव्यक्तमानों के अन्तर के उस फल का मान बताओ जिसमें सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तीन हैं।

मान लो कि वह फल =फ=आ अ$_{०}^{२}$अ$_{३}$ + का अ$_{०}$अ$_{१}$अ$_{२}$ + खा अ$_{१}^{३}$ (१६६ प्र० देखो)

तो वी फ=(३आ + का) अ$_{०}^{२}$अ$_{२}$ + (२का + ३खा) अ$_{१}^{२}$अ$_{०}$=०

इसलिये ३आ+का=०। २का+३खा=०।

यदि मान लो कि अ=१ तो का=—३, खा=२। इनके उत्थापन से

फअ=$_{०}^{२}$अ$_{३}$—३ अ$_{०}$अ$_{१}$अ$_{२}$ + २ अ$_{१}^{३}$।

यदि अ$_{०}$य^{३} + ३अ$_{१}$य^{२} + ३अ$_{२}$य + अ$_{३}$=0.......... ..(१)

इस पर से ३८ वें प्रक्रम की युक्ति से एक ऐसा नया समी-

करण बनाओ जिसमें दूसरा पद न रहे तो वह समीकरण

$$र^3 + \frac{3}{अ_1^2}(अ_0 अ_2 - अ_1^2) र + \frac{1}{अ_0^2}(अ_0^2 अ_3 - 3 अ_0 अ_1 अ_2 + 2 अ_1^3) \ldots\ldots (2)$$

ऐसा होगा। इसमें यदि

$अ_0 अ_2 - अ_1^2 = हा$ और $अ_0^2 अ_3 - 3 अ_0 अ_1 अ_2 + 2 अ_1^3 = गा$

तो ऊपर जो फ आया है वह गा के तुल्य ही है। ऊपर के घन समीकरण में यदि $अ_0 र = ल$ तो $र = \frac{ल}{अ_0}$, इसके उत्थापन से

$$\frac{ल}{अ_0^3} + \frac{3}{अ_0^3} हाल + \frac{गा}{अ_0^3} = \text{ वा } ल^3 + 4 हाल + गा = 0 \ldots (3)$$

हा और गा ये घन समीकरणों में बड़े उपयोगी हैं।

२२४। २·१ वें प्रक्रम से $स_न$ का चलस्पर्द्धी फी $(स_न, स_{न-1} \ldots\ldots स_0)$ यह है जिसे यदि फी कहें और जब $य=0$ तब फी को $फी_0 = फी\ (अ_न, अ_{न-1}, \ldots\ldots अ_0)$ कहें और ऊपर के प्रक्रम का सङ्केत वी ग्रहण करें जिसका नाम कारक कहो तो चलनकलन से और वी कारक से

$$फी = फी_0 + य\, वी\, फी_0 + \frac{य^2}{2!} वी^2 फी_0 + \cdots\cdots + \frac{य}{वी^त}\ फ_0$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

यहां $फी_0$ का बार बार वी लेने से मान बदलता बदलता जब फी $(अ_0, अ_1, \ldots\ldots, अ_न)$ ऐसा होगा तब यह अव्यक्त

के मानों का अन्तर होगा। २२३ वें प्रक्रम की युक्ति से फिर आगे इसका वी शून्यके तुल्य होगा और फी के श्रेढी रूप मान में आगे के सब पद उड़ जायँगे। इसका मान फा ($इ_१, इ_२,$ ....$इ$) के वि कारक से जान सकते हैं। जैसे

उदाहरण

१। $अ_० य^३ + ३ अ_१ य^२ + ३ अ_२ य + अ_३ = ०$ इसमें यदि $अ_० अ_२ - अ_१^२ =$ हा और १२० वें प्रक्रम के उदाहरण को लेने से

$$अ_०^२ यौ इ_१^२ (इ_२ - इ_३)^२ = १८ (अ_२^२ - अ_१ अ_३)$$

तो यहां $फि_० = अ_०^२ यौ इ_१^२ (इ_२ - इ_३)^२ = फी_०$

$$= १८ (अ_२^२ - अ_१ अ_३) = फी_०$$

बायें पक्ष का वि और दहिने पक्षका वी लेने से

$$- अ_०^२ यौ २ इ_१ (इ_२ - इ_३)^२ = १८ (अ_१ अ_२ - अ_० अ_३) = वी फी_०$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से

$$(अ_०^२ यौ १ (इ_२ - इ_३)^२ = ३६ (अ_१^२ - अ_० अ_२) = वी^२ फी_०$$

फिर वैसी ही क्रिया करने से दोनों पक्ष शून्य के तुल्य होंगे। इनका उत्थापन फी में देने से और -१८ का भाग दे देने से

$$(अ_१ अ_३ - अ_२^२) + (अ_० अ_३ - अ_१ अ_२) य + (अ_० अ_२ - अ_१^२) य^२$$

यह चलस्पर्द्धी का रूप हुआ जो कि १२० वें प्रक्रम के उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। देखो ऊपर के चलस्पर्द्धी के $य^२$ का गुणक हा है और हा का वी शून्य होता है; इसलिये हा को

प्रधान गुणक कहते हैं। इसी प्रधान हा से फी ($अ_०, अ_१, \ldots\ldots अ_न$) यह बना है। इसी में $अ_०$, $अ_१$......इत्यादि के स्थान में इनके स्पर्द्धी $अ_न$, $अ_{न-१}$......इत्यादि के उत्थापन से फी$_०$ बनता है। फिर फी में $अ_न$, $अ_{न-१}$......इत्यादि के स्थान में $स_न$, $स_{न-१}$,......इत्यादि के उत्थापन से चलस्पर्द्धी का रूप होता है।

२। $अ_० य^४ + ४ अ_१ य^३ + ६ अ_२ य^२ + ४ अ_३ य + अ_४ = ०$ इस चतुर्घात समीकरण का वह चलस्पर्द्धी बनाओ जिसमें प्रधान गुणक हा हो।

$हा = अ_० अ_२ - अ_१^२$, और चलस्पर्द्धी चतुर्घात का समीकरण होगा। क्योंकि यहां सो=२ और धु=२; इसलिये २२२ वें प्रक्रम से $म = न\ सो - २\ धु = ४ \times २ - २ \times २ = ४$।

$अ_०$, $अ_२$, $अ_१$ इनके स्थान में इनके स्पर्द्धी $अ_४$, $अ_२$, $अ_३$ के उत्थापन से

$$फी_० = अ_४ अ_२ - अ_३^२$$

$$वी\ फी_० = २ अ_१ अ_४ - ६ अ_२ अ_३ + ४ अ_३ अ_२ - २\ अ_१ अ_४ - अ_२ अ_३)$$

$$वी^२\ फी_० = २\ (अ_० अ_४ - २\ अ_१ अ_३ - ३\ अ_२^२ + ४\ अ_३\ अ_१)$$
$$= २\ (अ_० अ_४ + २\ अ_१ अ_३ - ३\ अ_२^२\ )$$

$$वी^३\ फी = २\ (४\ अ_० अ_३ + २\ अ_० अ_३ - १२\ अ_१ अ_२ + ६ अ_१ अ_२)$$
$$= ४\ (३\ अ_० अ_३ - ३\ अ_१ अ_२) = १२\ (अ_० अ_३ - अ_१ अ_२)$$

$$\text{वी}^४\ \text{फी}_० = १२(३\ \text{अ}_०\text{अ}_२ - २\ \text{अ}_१^२ - \text{अ}_०\text{अ}_२)$$
$$= २४\ (\text{अ}_०\text{अ}_२ - \text{अ}_१^२)$$

इनके उत्थापन से चलस्पर्द्धी

$$(\text{अ}_०\text{अ}_२ - \text{अ}_१^२)\text{य}^४ + २(\text{अ}_०\text{अ}_३ - \text{अ}_१\text{अ}_२)\text{य}^३ + (\text{अ}_०\text{अ}_४ + २\ \text{अ}_१\text{अ}_३ - ३\ \text{अ}_२^२)\ \text{य}^२$$

$$+ २\ (\text{अ}_१\text{अ}_४ - \text{अ}_२\text{अ}_३)\text{य} + (\text{अ}_२\text{अ}_४ - \text{अ}_३^२) = \text{हा}$$

२२५। कल्पना करो कि $(\text{अ}_०, \text{अ}_१, \text{अ}_२, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})\ (\text{य}, \text{र})^\text{न}$ के दो चलस्पर्द्धी

$(\text{का}_१, \text{का}_१, \text{का}_२ \ldots\ldots, \text{का}\ )\ (\text{य}, \text{र})^\text{प} \equiv \text{का}_०\ (\text{य} - \text{क}_१\text{र})$ $(\text{य} - \text{क}_२\text{र}) \ldots\ldots\ldots \text{य} - \text{क}\ \ \text{र})$

और $(\text{खा}_०, \text{खा}_१, \text{खा}_२, \ldots\ldots, \text{खा}_\text{ब})\ (\text{य}, \text{र})\ \equiv \text{खा}_०\ (\text{य} - \text{ख}_१\ \text{र})\ (\text{य} - \text{ख}_२\ \text{र}) \ldots\ldots (\text{य} - \text{ख}\ \ \text{र})$ हैं तो

$$\text{का}_०\text{क}_१\ \text{र} + \text{प}\text{का}_१\text{क}_१^{\text{प}-१}\text{र} = + \frac{\text{प}(\text{प}-१)}{२\,!}\text{का}_२\ \text{क}_१^{\text{प}-२}\text{र}^\text{प} + \ldots\ldots\ldots + \text{का}_\text{प}\text{र}^\text{प} = ०$$

र का भाग दे देने से

$$\text{का}_०\ \text{क}_\text{त} + \text{प}\ \text{का}_१\ \text{क}_\text{त}^{\text{प}-१} + \frac{\text{प}(\text{प}-१)}{२\,!}\text{का}_२\text{क}_\text{त}^{\text{प}-२} + \ldots\ldots + \text{का} = ० \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

२२३ वें प्रक्रम की युक्ति से $\text{का}_०, \text{का}_१, \cdots\cdots, \text{का}_\text{प}$ को मुख्य समीकरण$(\text{अ}_०, \text{अ}_१, \cdots \text{अ}\ )(\text{य}, \text{न})$ के अव्यक्त मानों के फल

होने से $वि का_0 = 0$, $प वि का_1 = प का_0, \frac{प (प-१)}{२!} वि का_2 = प का_1 (प-१)$

सलिये

$$वि \left\{ का_0 क_त + प का_1 क_त^{प-१} + \frac{प (प-१)}{२!} का_2 क_त^{प-२} + \ldots\ldots + का_प \right\}$$

$$= प का_0 क_त^{प-१} वि क_त + प का_0 क_त^{प-१} +$$
$$प (प-१) का_1 क_त^{प-२} वि क_त + प (प-१) का_1 क_त^{प-२} + \ldots\ldots$$
$$= प का_0 क_त^{प-१} (१ + वि क_त) + \{प (प-१) का_1 क_त^{प-२}\} (१ + वि क_त) + \ldots\ldots$$

$$प \left\{ का_0 क_त^{प-१} + (प-१) का_1 क_त^{प-२} + \frac{(प-१)(प-२)}{२!} \times का_2 क_त^{प-३} + \ldots\ldots + का_{त-१}^{१} \right\} (१ + वि क_त) = 0$$

इसलिये $वि क_त + १ = 0 \quad \therefore \quad वि क_त = -१$

इसी प्रकार $वि ख_थ + १ = 0 \therefore वि ख_थ = -१$

$$\therefore वि (क_त - ख_थ) = 0$$

परन्तु $क_त - ख_थ$ का वि तभी शून्य होगा जब $क_त - ख_थ$ यह मुख्य समीकरण के मानों के अन्तर का फल होगा।

इस पर से सिद्ध होता है कि

दो चलसपद्धियोंआकेक्तव्य मानों के अन्तर का फल

मुख्य समीकरण के अव्यक्त मानों के अन्तरों का फल होगा।

२२६। वर्णान्तर के उत्थापन से $स_न$ का मान जो $स'_न$ होता है उसका अचलस्पर्द्धी $स_न$ के अचलस्पर्द्धी को $\begin{vmatrix} द & त \\ द' & त' \end{vmatrix}$ इस कनिष्ठफल के धु घात से गुण देने से होता है।

कल्पना करो कि $स_न$ के $य=\frac{दय'+त}{द'य'+त'}$, ऐसा मान कर समीकरण का रूपान्तर किया और $स_न$ का अचलस्पर्द्धी

$$आ=अ_0^{सो} यौ (इ_1 - इ_2)^{अ}(इ_2 - इ_3)^{क}\ldots\ldots(इ_1 - अ_न)^{ट}$$

जहां प्रत्येक अव्यक्त मान के सो तुल्य परमघात आए हैं। तो रूपान्तर किए हुए समीकरण को $से'_न$ कहो तो इसमें किसी दो अव्यक्त $इ'_थ$ और $इ'_ध$ के मान ऊपर के य मान से जो

$$य'=\frac{त'य-त}{द-द'य}$$ यह सिद्ध होता है उसमें उत्थापन देने से

$$इ'_थ=\frac{त'इ_थ-त}{द-द'इ_थ},\ इ'_ध=\frac{त'इ_ध-त}{द-द'इ_ध}$$

$$\therefore इ'_थ-इ'_ध=\frac{(दत'-द'त)(इ_थ-इ_ध)}{(द-द'इ_थ)(द-द'इ_ध)}$$

और $स'_न=अ'_0(य'-इ'_1)(य'-इ'_2)\ldots\ldots(य'-इ'_न)$ (यदि अभिन्न में रूप बनाओ तो)

जहां $अ'_0=अ_0(द-द'इ_1)(द-द'इ_2)\cdots\cdots(द-द'इ_न)$

अब यदि $इ'_य - इ'_ध$ इसमें य और ध के स्थान में १,२, २,३ इत्यादि के उत्थापन से $स'_न$ का अचलस्पर्द्धी आ' बनाओ और $अ_०$ के स्थान में $अ'_०$ का उत्थापन दो तो हर के उड़ जाने से

$$आ' = (दत' - द'त)^{धु} आ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

ऐसा होगा।

इसी प्रकार यदि स का चलस्पर्द्धी

$$फी\,(य) = अ_०^{सो}\, यौ\, (इ_१ - इ_२)^{अ} (इ_२ - इ_३)^{क} \ldots\ldots\ldots (य - इ_१)^{प} (य - इ_१)^{व}$$

जो कि फी (य) के आधार अव्यक्त मानोंके फल फीमें $इ_१$, $इ_२$, ... $इ_न$ इत्यादि के स्थान में $-य + इ_१$, $-य + इ_२$, ... $-य + इ_न$ के उत्थापन से उत्पन्न हुआ है। (२२१ वाँ प्र० देखो)

तो स' का चलस्पर्द्धी$=(दत' - द'त)$धु फी (य) होगा। क्योंकि ऊपर की युक्ति से जब फी (य) के आधार फल फि में $इ'_१$, $इ'_२$,......इत्यादि का उत्थापन दोगे तो हर में

$(द - द'इ_१)\,(द - द'इ_२) \ldots\ldots (द - द'इ_न)$ इसका सो घात रहेगा जो $अ'^{सो}_०$ इस गुणक के कारण नाश हो जायगा। केवल गुणक $अ_०^{सो}$ यह रह जायगा और $(दत' - द'त)$ का धु घात गुणक होगा। २२४ वें प्रक्रम में $फी_०$ के वी से जो चलस्पर्द्धी आया है उस से भी यही सिद्ध होता है।

२२७। यदि

$$स_न = अ_0 य^न + न अ_1 य^{न-१} र + \frac{न(न-१)}{२!} अ_2 य^{न-२} र^२ + \cdots\cdots + अ_न र^न$$

ऐसा ध्रुवशक्तिक फल हो तो

$\frac{दय' + त}{द'य' + त'} = य$ इसके स्थान में $स_न$ को अभिन्न करने के लिये

$\frac{य}{र} = \frac{दय' + तर'}{द'य' + त'र'} = ल = \frac{दल' - त}{द'ल' + त'}$ ऐसा मानना चाहिए जहाँ $य = दय' + तर'$ और $र = द'य' + त'र'$ और

$$स_न = र^न (अ_0 ल^न + न अ_1 ल^{न-२} + \ldots\ldots + अ_न)$$

$$= (द'य' + त'र')^न \left\{ \frac{अ_0 (दय' + तर')^न}{(द'य' + त'र')^न} + \frac{न अ_1 (दय' + तर')^{न-१}}{(द'य' - त'र')^{न-१}} \right.$$

$$= अ_0 (दय' + तर')^न + न अ_1 (दय' + तर')^{न-१} (द'य' + त'र') + \cdots\cdots$$

इस पर से कह सकते हो कि एक अव्यक्त के फलों को दो वर्णान्तरों के ध्रुवशक्तिक फलों के रूप में बदल सकते हैं।

अर्थात् यदि $स = अ_0 य \times न अ_1 य^{न-१} र + \cdots\cdots + र$ इसका अचलस्पर्द्धी आ हो और $य = \frac{दय' + तर'}{द'य' + त'र'}$ ऐसा मान कर उत्थापन से स ' का अचलस्पर्द्धी आ' बनाओ तो

$आ' = (दत' - द'त)^{ध्रु}$ आ इसमें त और त' के स्थान में त र और त'र के उत्थापन से

$आ' = (दत' - द'त)^{धु} र^{'धु} आ$ ऐसा होगा।

$स_न = र^न(अ_० ल^न + नअ_१ ल^{न-१} + \cdots\cdots + अ_न) = ०$

तो $र^न$ के अपवर्त्तन से $अ_० ल^न + नअ_१ ल^{न-१} + \cdots + अ_न = ०$ इसमें ल के वे ही मान होंगे जो $अ_० य^न + नअ_१ य^{न-१} + \cdots\cdots + अ_न = ०$ इसमें होंगे ; इसलिये

$(अ_०, अ_१, \cdots\cdots, अ_न)(य, १)^न$ इसका जो अचलस्पर्द्धी होगा वही $(अ_०, अ_१, \cdots\cdots, अ_न)(ल, १)^न$ इसका अचलस्पर्द्धी होगा।

$(अ_०, अ_१, अ_२, \cdots\cdots, अ_न)(य, १)^न$ इसके $इ_१, इ_२, इ_३, \cdots\cdots इ_न$ के मानों के र गुणित तुल्य मान $(अ_०, अ_१, \cdots\cdots अ_न)(य, र)^न$ इसके होंगे। इसलिये इसका अचलस्पर्द्धी पहिले अचलस्पर्द्धी को $र^{धु}$ इससे गुण देने से होगा।

$अ_० ल^न + नअ_१ ल^{न-१} + \cdots\cdots + अ_न = ०$ इसमें $ल = \frac{य}{र}$ के स्थान में $\frac{द य' + त र'}{द' य' + त' र'}$ अर्थात् य के स्थान में $दय' + तर'$ का और र के स्थान में $द'य' + त'र'$ का उत्थापन देने से इस नये समीकरण का अचलस्पर्द्धी $= (दत' - द'त)^{धु} र^{धु} आ$ जहां $अ_० ल^न + नअ_१ ल^{न-१} + \cdots\cdots + अ_न$ का अचलस्पर्द्धी आ है। इससे नीचे लिखी बातें सिद्ध होती हैं :—

(१) किसी बहुपद अव्यक्तराशि का अचलस्पर्द्धी पदों के गुणकों का ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं को व्यक्ताङ्क गुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दें तो नये समीकरण के पद गुणकों का वैसा ही फल, पहिले फल को $दत' - द'त$ इसके

एक कोई घात ध्रु से गुण देने से जो गुणनफल होगा उसके तुल्य होगा।

(२) चलस्पर्द्धी बहुपद अव्यक्तराशि के पदों के गुणकों का और अव्यक्तों का एक ऐसा फल है कि यदि अव्यक्त राशिओं के स्थान में व्यक्ताङ्कगुणित युत वर्णान्तरों से उत्थापन दें तो इसमें उसी फल के ऐसा पद गुणकों का और नये अव्यक्त राशिओं का जो फल हो वह पूर्वफल को $\text{दत}' - \text{द}'\text{त}$ के ध्रु घात से गुण देने से जो हो उसके तुल्य होगा।

$\text{दत}' - \text{द}'\text{त}$ इसे समीकरणों के परिवर्त्तन का मध्यस्थ कहते हैं।

उदाहरण

१। यदि $\text{य} = \text{दया} + \text{तरा}$, $\text{र} = \text{द}_{१}\text{या} + \text{त}_{१}\text{रा}$ और $\text{अय}^{२} + \text{२कयर} + \text{खर}^{२} = \text{आया}^{२} + \text{२कायारा} + \text{खारा}^{२}$ तो पहिले का अचलस्पर्द्धी $\text{अख} - \text{क}^{२}$ यह होगा, क्योंकि २२२वें प्रक्रम के पहिले उदाहरण में यही दा है और दा का वी शून्य होता है। इसलिये ऊपर (१) नियम से ध्रुवशक्ति दो होने से $\text{आखा} - \text{का}^{२} = (\text{दत}_{१} - \text{द}_{१}\text{त})^{२}(\text{अख} - \text{क}^{२})$ ऐसा होगा।

२। $(\text{अ}, \text{क}, \text{ख}, \text{ग}, \text{घ})(\text{य}, \text{र})^{४} = (\text{आ}, \text{का}, \text{खा}, \text{गा}, \text{घा})(\text{या}, \text{रा})^{४}$

जहां $\text{य} = \text{दया} + \text{तरा}$, $\text{र} = \text{द}'\text{या} + \text{त}'\text{रा}$।

यहां २१० प्रक्रम के दूसरे उदाहरण से पहिले का अचलस्पर्द्धी $\text{अघ} - \text{४कग} + \text{३ख}^{२}$ यह है और ध्रु $= ४$ और मध्यस्थ $= (\text{दत}_{१} - \text{द}_{१}\text{त})$,

इसलिये $\text{आघा} - \text{४कागा} + \text{३खा}^{२} = (\text{दत}_{१} - \text{द}_{१}\text{त})^{४} \times (\text{अघ} - \text{४कग} + \text{३ख}^{२})$

३। दूसरे उदाहरण में २२० प्रक्रम के तीसरे उदाहरण से $अखघ + २कखग - अग^{२} - क^{२}घ - ख^{३}$ यह भी पहिले का अचलस्पर्द्धी है जहां धु = ६ ; इसलिये

$$आखाघा + २काखागा - आगा^{२} - का^{२}घा - खा^{३}$$
$$= (दत_{१} - द_{१}त)^{६} (अखघ + २कखग - अग^{२} - क^{२}घ - ख^{३})$$

४। ऊपर ही के रूपान्तर से यदि

$$अय^{२} + २कयर + खर^{२} = आया^{२} + २कायारा + खारा^{२} \quad \ldots\ldots\ldots (१)$$
$$अ_{१}य^{२} + २क_{१}यर + ख_{१}र^{२} = आ_{१}या^{२} + २का_{१}यारा + खा_{१}रा^{२} \quad \ldots\ldots\ldots (२)$$

तो (१) में इ गुणित (२) को जोड़ देने से

$$(अ + इअ_{१})य^{२} + २(क + इक_{१})यर + (ख + इख_{१})र^{२}$$
$$= (आ + इआ_{१})या^{२} + २(का + इका_{१})यारा + (खा + इखा_{१})रा^{२}$$

(१) उदाहरण से

$$\{दत_{१} - द_{१}त\}^{२}\{(अ + इअ_{१})(ख + इख_{१}) - (क + इक_{१})^{२}\}$$
$$= (आ + इआ_{१})(खा + इखा_{१}) - (का + इका_{१})^{२}$$

दोनों पक्षों में इ के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$आखा_{१} + आ_{१}खा - २काका_{१} = (दत_{१} - द_{१}त)^{२} \times (अख_{१} + अ_{१}ख - २कक_{१})$$

और $आ_{१}खा_{१} - का_{१}^{२} = (दत_{१} - द_{१}त)^{२}(अ_{१}ख_{१} - क_{१}^{२})$ जो कि प्रथम उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है।

५। $अय^{२} + कर^{२} + खल^{२} + २फरल + २गयल + २हयर$ इस ध्रुवक्किक समीकरण में $य = द_{१}या + त_{१}रा + थ_{१}ला$, $र = द_{२}या +$

त$_{2}$रा + थ$_{2}$ला और ल = द$_{3}$या + त$_{3}$रा + थ$_{3}$ला ऐसे मानों से समीकरण को बदलने से यदि समीकरण का रूपान्तर आया^{2} + कारा^{2} + खाला^{2} + २फाराला + २गायाला + २हायारा ऐसा हो तो सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} \text{द}_1 & \text{द}_2 & \text{द}_3 \\ \text{त}_1 & \text{त}_2 & \text{त}_3 \\ \text{थ}_1 & \text{थ}_2 & \text{थ}_3 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{आ} & \text{हा} & \text{गा} \\ \text{हा} & \text{का} & \text{फा} \\ \text{गा} & \text{फा} & \text{खा} \end{vmatrix}$$

पहिले समीकरण में अव्यक्त के नये मानों का उत्थापन देकर गुणकों का परस्पर सम्बन्ध जान कर ऊपर के कनिष्ठ-फलों की समता सहज में जान सकते हो। इससे यह भी जान पड़ता है कि दिए हुए तीन अव्यक्त सम्बन्धी समीकरणों का

$$\begin{vmatrix} \text{अ} & \text{ह} & \text{ग} \\ \text{ह} & \text{क} & \text{फ} \\ \text{ग} & \text{फ} & \text{ख} \end{vmatrix}$$ यह अचलस्पर्द्धी है।

२२८—यदि (अ$_{0}$, अ$_{1}$, अ$_{2}$ ......, अ$_{न}$) (य, र)^{न} = स$_{न}$ इसमें य = या + चरा, र = ०या + रा तो स$_{न}$ का रूपान्तर (अ$_{0}$, अ$_{1}$, अ$_{2}$, ..., अ$_{न}$) (या, रा)^{न} ऐसा होगा जहां १२६वें प्रक्रम से आ$_{0}$ = अ$_{0}$, आ$_{1}$ = अ$_{1}$ + अ$_{0}$च, आ$_{2}$ = अ$_{2}$ + २अ$_{1}$च + अ$_{0}$च^{2}; इत्यादि।

अब यदि स$_{न}$ का चलस्पर्द्धी फी (अ$_{0}$, अ$_{1}$, अ$_{2}$, ...अ$_{न}$ य, र) यह हो तो १२६वें प्रक्रम के (२) नियम से मध्यस्थ दत' − द'त के १ के तुल्य होने से

फी (अ$_{0}$, अ$_{1}$, अ$_{2}$, ...अ$_{न}$, य, र)

= फी (आ$_{0}$, आ$_{1}$, आ$_{2}$, ...आ$_{न}$, या, रा)

= फी (आ$_{0}$, आ$_{1}$, आ$_{2}$, ...आ$_{न}$, य − चर, र)

दहिने पक्ष का रूप चलनकलन के ६८वें प्रक्रम से च के घात वृद्धि में ले आने से

$$फी = फी + च\left(वी फी - र\frac{ता फी}{ता य}\right) + हा_2 च^2 + हा_3 च^3 + \ldots\ldots$$

जहां $हा_2, हा_3$, इत्यादि $च^2, च^3$ इत्यादि के गुणक हैं।

च के किसी मान में यह समीकरण ठीक होगा। इसलिये फी को दोनों पक्षों में घटाकर च का भाग देकर लब्धि में च को शून्य मानने से $वी फी - र\frac{ता फी}{ता य} = 0$

$$\therefore र\frac{ता फी}{ता य} = वी फी = अ_0\frac{ता फी}{ता अ_1} + 2 अ_1\frac{ता फी}{ता अ_2} + 3 अ_2\frac{ता फी}{ता अ_3}$$

$$+ \ldots\ldots + न अ_{न-1}\frac{ता फी}{ता अ_न} \ldots\ldots (1)$$

यदि फी को $(का_0, का_1, का_2, का_3, \ldots\ldots का_म)(य, र)^म$ ऐसा कल्पना करें तो

$$र\frac{ता फी}{ता य} = म का_0 य^{म-1} र + म(म-1) का_1 य^{म-2} र^2 + \ldots\ldots$$

$$+ म का_{म-1} र^म$$

$$= वी फी = वी का_0 य^म + म वी का_1 य^{म-1} र + \ldots\ldots + वी का_म र^म$$

य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$$वी का_0 = 0, वी का_1 = का_0, वी का_2 = 2 का_1, \ldots\ldots, वी का_म = म का_{म-1}$$

यही बात २२४वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुई है।

यदि ऊपर के $स_न$ के मान में य = ०या + रा, र = या + ०रा ऐसा मानें तो यहां मध्यस्थ − १ होगा और ($अ_०, अ_१, \cdots अ_न$) $(य, र)^न$ = ($अ_न, अ_{न-१}, \cdots, अ_०$) $(या, रा)_न$ और तब $स_न$ का चलस्पर्द्धी

$$(-१)^{ध्रु} फी (अ_०, अ_१, अ_२, \ldots अ_न, य, र)$$
$$= फी (अ_न, अ_{न-१}, \ldots, अ_०, या, रा)$$
$$= (-१)^{ध्रु} फी (अ_०, अ_१, अ_२, \ldots, अ_न, रा, या)$$

इस पर से सिद्धि होता है कि

चलस्पर्द्धी के आदि पद से आगे और अन्त पद से पीछे तुल्यान्तरित पदों के गुणक, संख्या में समान होंगे (यदि ध्रु विषम होगा तो विरुद्ध चिन्ह के होंगे)।

यदि किसी एक मान में $अ_०, अ_१$ इत्यादि के स्थान में उनके स्पर्द्धी $अ_न, अ_{न-१}$ इत्यादि रख दिए जांय। र के स्थान में य और य के स्थान में र को रख देने से और $अ_०, अ_१, \ldots$ इत्यादि के स्थान में $अ_न, अ_{न-१}$ इत्यादि के ग्रहण करने से (१) समीकरण से

$$य \frac{ताफी}{तार} = अ_न \frac{ताफी}{ताअ_{न-१}} + २अ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_{न-२}} + ३अ_{न-२} \frac{ताफी}{ताअ_{न-३}}$$
$$+ \ldots \ldots + नअ_१ \frac{ताफी}{ताअ_०}$$

यदि $स_न$ का फी($अ_०, अ_१, अ_२, \ldots, अ_न$) यह अचलस्पर्द्धी हो तो ऊपर जो य और र के परिवर्त्तन से नया $स_न = स'_न$ ऐसा बनेगा, उसको अचलस्पर्द्धी, मध्यस्थ का मान एक होने से

२२५ प्रक्रम के (१) समीकरण से $स'_न$ और $स_न$ के अचल-स्पर्द्धिओं में

$$फी (आ_०, आ_१, आ_२, \cdots, आ_न) = फी (अ_०, अ_१, अ_२, अ_३, \cdots अ_न)$$

ऐसा समीकरण बनेगा।

और ऊपर के (१) समीकरण से अब

$$अ_० \frac{ताफी}{ताअ_१} + २अ_१ \frac{ताफी}{ताअ_२} + ३अ_२ \frac{ताफी}{ताअ_३} + \cdots\cdots + नअ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_न} = ०$$

$$अ_न \frac{ताफी}{ताअ_{न-१}} + २अ_{न-१} \frac{ताफी}{ताअ_{न-२}} + ३अ_{न-२} \frac{ताफी}{ताअ_{न-३}} + \cdots\cdots + नअ_१ \frac{ताफी}{ताअ_०} = ०$$

और $स'_न$ में यदि य=रा, र=या तो मध्यस्थ का मान −१ होगा; इसलिये तब दोनों के अचलस्पर्द्धिओं में

$$फी(अ_न, अ_{न-१}, \cdots\cdots, अ_०) = (-१)^{ध्रु} फी(अ_०, अ_१, अ_२, \cdots, अ_न)$$

इससे सिद्ध होता है कि

$अ_०, अ_१, अ_२, \cdots\cdots$ इत्यादि के स्थान में यदि $अ_न$, $अ_{न-१}$, $अ_{न-२}$ इत्यादि का उत्थापन दें तब जो $स'_न$ होगा उसका अचलस्पर्द्धी $स_न$ के अचलस्पर्द्धी के समान ही होता है। जब ध्रु विषम होता है तब केवल दोनों, संख्या में तुल्य, विरुद्ध चिन्ह के होंगे।

२२९—इस प्रक्रम में चलस्पर्द्धी और अचलस्पर्द्धिओं के विषय में जो कुछ लिख आए हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण क्रिया समत दिखलाते हैं।

उदाहरण

१। $स_२ = अ_० य^२ + २ अ_१ य + अ_२ = ०$ इसमें अव्यक्त मान $इ_१, इ_२$ हों तो सिद्ध करो कि किसी वर्ग समीकरण में एक ही प्रधान अचलस्पर्द्धी होता है और चलस्पर्द्धी उस वर्ग समीकरण को छोड़ कर और कोई नहीं होता।

यहां $स_२ = अ_० (य - इ_१)(य - इ_२)$

और $इ_१ - इ_२ = २ \sqrt{\frac{अ^२_१ - अ_२ अ_०}{अ^२_०}}$

इसलिये यहां अचलस्पर्द्धी वा चलस्पर्द्धी $(इ_१ - इ_२)^{२प}$ इस रूप से होगा क्योंकि अव्यक्त के मानान्तर का विषम घात समीकरण के पद गुणकों का अकरणीगत फल नहीं होता। इसलिये $(इ_१ - इ_२)^{२प}$ इसमें $इ_१ इ_२$ के स्थान में $इ_१ - य, इ_२ - य$ के उत्थापन से और भिन्न को दूर करने के लिये $स_२^{२प}$ से गुण देने से स्पर्द्धी का रूप $स_२^{२प}\left(\frac{१}{इ_१ - य} - \frac{१}{इ_२ - य}\right)^{२प}$

$$= \frac{अ_०^{२प}(इ_२ - इ_१)^{२प}}{(इ_१ - य)^{२प}(इ_२ - य)^{२प}} (इ_१ - य)^{२प}(इ_२ - य)^{२प}$$

$$= अ_०^{२प}(इ_२ - इ_१)^{२प} = २^{२प} अ_०^{२प}(अ^२_१ - अ_२ अ_०)^प$$

स्थिर गुणकों को हटा देने से अचलस्पर्द्धी $अ_0 अ_2 - अ^2_1$ यह होगा।

इसके घात प के तुल्य जो ऊपर अचलस्पर्द्धी है वह इसी से बना है। इसलिये प्रधान अचलस्पर्द्धी $अ_0 अ_2 - अ^2_1$ यही होगा और यदि $फी_0 = अ_2$ तो २२३वें प्रक्रम से $फी_0 = अ_2$, $वीफी_0 = २अ_1$, $वी^2फी_0 = २अ_0$। इसलिये $स_2$ का चलस्पर्द्धी $फी = फी_0 + य\, वी\, फी_0 + \frac{य^2}{१\cdot२} वी^2 फी_0 = अ_2 + २अ_1 य + अ_0 य^2$, यह $स_2$ ही है।

२। घन समीकरण में चलस्पर्द्धिओं के रूपों को बताओ, जहां $स_3 = अ_0 य^3 + ३अ_1 य^2 + ३अ_0 य + अ_3 = ०$ और अव्यक्त मान $इ_1, इ_2, इ_3$ हैं।

यहां अव्यक्त के कोई दो मान $इ_1$ और $इ_2$ के अन्तर $इ_1 - इ_2$ में $\frac{१}{इ_1 - य}$, $\frac{१}{इ_2 - य}$ इनके उत्थापन से

$$\frac{१}{इ_1 - य} - \frac{१}{इ_2 - य} = \frac{इ_2 - इ_1}{(य - इ_1)(य - इ_2)}$$

$$= \frac{-(इ_2 इ_3 + इ_1 य) + (इ_1 इ_3 + इ_2 य)}{(य - इ_1)(य - इ_2)(य - इ_3)}$$

भिन्न को हटाने के लिये $स_3$ से गुण देने से

$अ_0 \{-(इ_2 इ_3 + इ_1 य) + (इ_1 इ_3 + इ_2 य)\}$ ऐसा होगा। यहां बृहत्कोष्ठकान्तर्गत जो राशि है वह देखो $इ_1 - इ_2$ इसमें

$-इ_१$, और $इ_२$ के स्थान में $इ_२इ_३ + इ_१य$ और $इ_१इ_३ + इ_२य$ के उत्थापन से बनी है। इसी प्रकार $इ_२ - इ_३$ इसमें भी $-इ_३$ के स्थान में $इ_१इ_२ + इ_३य$ और $इ_२$ के स्थान में ऊपर जो लिख आए हैं उनके उत्थापन से तत्सम्बन्धी ऊपर का फल बन जायगा। इसलिये घन समीकरण के चलस्पर्द्धिओं के लिये $-इ_१, -इ_२$ और $-इ_३$ इनके स्थान में ऊपर की राशिओं का उत्थापन दे सकते हैं।

(१) यदि अव्यक्त मानों के अन्तर का फल हा वा गा हो (२२२ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो) तो सोपान और ध्रुव शक्ति दोनों तुल्य होंगे। और $अ_०^२$ यौ $(इ_१ - इ_२)^२$

$$= २अ_०^२ (इ_१^२ + इ_२^२ + इ_३^२ - इ_१इ_२ - इ_१इ_३ - इ_२इ_३)$$

$$\therefore अ_०^२(इ_१^२ + इ_२^२ + इ_३^२ - इ_१इ_२ - इ_१इ_३ - इ_२इ_३)$$

$$= अ_०^२(इ_१ + घाइ_२ + घा^२इ_३)(इ_१ + घा^२इ_२ + घाइ_३)$$

$$= ९(अ_१^२ - अ_०अ_२)$$

जहां घा, $घा^२$, १ के घनमूल हैं।

चलस्पर्द्धी बनाने के लिये ऊपर लिखे हुए मानों से बदलनेसे

$$अ_०^२ \{ (इ_१ + घाइ_२ + घा^२इ_३)य + इ_२इ_३ + घाइ_१इ_३ + घा^२इ_१इ_२ \}$$

$$\times \{ (इ_१ + घा^२इ_२ + घाइ_३)य + इ_२इ_३ + घइ_१इ_३ + घाइ_१इ_२ \}$$

$$= ९(स_२^२ - स_३स_१)$$

२२०वें प्रक्रम के उदाहरण से $स_२^२ - स_३स_१$ का रूप बनाने से और

$$इ_२इ_३ + घाइ_१इ_३ + घा^२इ_१इ_२ = ता_१, इ_१ + घाइ_२ + घा^२इ_३ = ता$$
$$इ_२इ_३ + घा^२इ_१इ_३ + घाइ_१इ_२ = मा_१, इ_१ + घा^२इ_२ + घाइ_३ = मा$$

ऐसा मानने से हा से चलस्पर्द्धी

$$हा_य \equiv (अ_०अ_२ - अ_१^२)य^२ + (अ_०अ_३ - अ_१अ_२)य + (अ_१अ_३ - अ_२^२)$$
$$= (ताय + ता_१)(माय + मा_१)$$

इस प्रकार $हा_य$ को दो गुण्य गुणक रूप खण्डों में बना सकते हैं।

यदि स₃ किसी राशि का पूरा घन हो तो $इ_१ = इ_२ = इ_३$ ऐसा होने से $हा_य$ के प्रत्येक पद के गुणक शून्य होंगे।

(२) यदि २२२ प्रक्रम के ग से चलस्पर्द्धी $गा_य$ बनाओ तो ऊपर ही की युक्ति से

$$अ_०^३\{(इ_१ + घाइ_२ + घा^२इ_३)^३ + (इ_१ + घा^२इ_२ + घाइ_३)^३\}$$
$$= -२७ अ_०^२अ_३ + २अ_१^३ - ३अ_०अ_१अ_२)$$

इसे बदल देने से

$$अ_०^३\{(ताय + ता_१)^३ + (माय + मा_१)^३\}$$
$$= -२७(स_३^२स_० + २स_२^३ - ३स_१स_२स_३) = २७गा_य$$

२२३ प्रक्रम की युक्ति से जिसमें प्रधान गुणक गा हो ऐसा चलस्पर्द्धी बनाओ तो

$$गा_य = (अ_०^२अ_३ - ३अ_०अ_१अ_२ + २अ_१^३)य^३ +$$
$$३(अ_०अ_१अ_३ + अ_१^२अ_२ - २अ_०अ_२^२)य^२$$

$$-(\text{अ}_3^2\text{अ}_0 - 3\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3 + 2\text{अ}_2^3)$$
$$- 3(\text{अ}_3\text{अ}_2\text{अ}_0 + \text{अ}_2^2\text{अ}_1 - 2\text{अ}_3\text{अ}_1^2)\text{य}$$

ऊपर के ता और मा से

$$\text{ता}^3 - \text{मा}^3 = \sqrt{-27(\text{इ}_2 - \text{इ}_3)(\text{इ}_3 - \text{इ}_1)(\text{इ}_1 - \text{इ}_2)}$$

ऊपर ही की युक्ति से $\text{इ}_1, \text{इ}_2, \text{इ}_3$ को दूसरे $\text{इ}_2\text{इ}_3 + \text{इ}_1\text{य}$ इत्यादि मानों से बदल देने से और मानों के अन्तरों को पद गुणकों के रूप में लाने से

$$(\text{ताय} + \text{ता}_1)^3 - (\text{माय} + \text{मा}_1)^3 = 27\frac{\text{म}_3\sqrt{\text{गा}^2 + 4\text{हा}^2}}{\text{अ}_0^3}$$

$$= 27\frac{\text{म}_3\sqrt{\triangle}}{\text{अ}_0^2}, \text{यदि} \sqrt{\text{गा}^2 + 4\text{हा}^2} = \text{अ}_0\sqrt{\triangle}$$

(४) अव्यक्त मानों के अन्तरादि वर्गों के घात को पद गुणकों के रूप में ले आने से

$$\text{अ}_0^4(\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2(\text{इ}_3 - \text{इ}_1)^2(\text{इ}_1 - \text{इ}_2)^2$$
$$= -27(\text{गा}^2 + 4\text{हा}^2) = -27\text{अ}_0^2\triangle$$

इसे ऊपर के उदाहरणों के ऐसा बदल देने से

$$\text{अ}_0^6(\text{इ}_2 - \text{इ}_3)^2(\text{इ}_3 - \text{इ}_1)^2(\text{इ}_1 - \text{इ}_2)^2(\text{य} - \text{इ}_1)^2$$
$$\text{य} - \text{इ}_2\ {}^2(\text{य} - \text{इ}_3)^2 = 27(\text{गा}_{\text{य}}^2 + 4\text{हा}_{\text{य}}^3)$$

इसलिये $\triangle\text{म}_3{}^2 = \text{गा}_{\text{य}}^2 + 4\text{हा}_{\text{य}}^3$

(५), (२) और (३) उदाहरणों से

$$२अ_0^3(ताय + ता_1)^3 = २७(स_3\sqrt{\triangle} - गा_य)$$

$$वा \; - २अ_0^3(माय + मा_1)^3 = २७(स_3\sqrt{\triangle} - गा_य)$$

दोनों के योग से स्पष्ट है कि $(स_3\sqrt{\triangle} + गा_य)^{\frac{1}{3}}$

$$+ (स_3\sqrt{\triangle} - गा_य)^{\frac{1}{3}} \text{ इससे}$$

$(ताय + ता_1)^3 - (माय + मा_1)^3$ यह अर्थात् $\dfrac{२७स_3\sqrt{\triangle}}{अ_0^3}$

यह वा $स_3$ यह निःशेष हो जायगा।

३—चतुर्घात समीकरण और इसके चल और अचल स्पर्द्धी।

१२०वें प्रक्रम के (२) उदाहरण में दिखला आए हैं कि चतुर्घात समीकरण का दो अचल स्पर्द्धी भा और छ हैं। और २२२ प्रक्रम के हा प्रधान गुणक से २२३वें प्रक्रम में चलस्पर्द्धी $हा_य$ का भी साधन कर चुके हैं। उसी प्रकार यदि गा प्रधान गुणक से चलस्पर्द्धी $गा_य$ बनावें तो

$$गा_य \equiv ३स_0स_1स_2 - स_0^2स_3 - २स_1^3$$

यदि $स_0, स_1$ इत्यादि के मानों का उत्थान दो तो

$$गा_य = आ_0 य^6 + आ_1 य^5 + आ_2 य^4 + आ_3 य^3$$

$$+ आ_4 य^2 + आ_5 य + आ_6$$

जहां २२३वें प्रक्रम की क्रिया से

$$आ_0 = -अ_0^2अ_3 + ३अ_0अ_1अ_2 - २अ_1^3,$$

$$आ_5 = -अ_4^2अ_0 - २अ_4अ_3अ_1 - ६अ_3^2अ_2 + ९अ_4अ_2^2$$

$$आ_4 = -५अ_5अ_3अ_0 - १०अ_3^2अ_1 + १५अ_4अ_2अ_1,$$

$$आ_3 = -१०अ_0अ_3^2 + १०अ_1^2अ_5,$$

$$आ_2 = ५अ_0अ_1अ_4 + १०अ_1^2अ_3 - १५अ_0अ_2अ_3,$$

$$आ_1 = अ_0^2अ_4 + २अ_0अ_1अ_3 + ६अ_1^2अ_2 - ९अ_0अ_2^2,$$

$$आ_0 = अ_0^2अ_3 - ३अ_0अ_1अ_2 + २अ_1^3 ।$$

यहां आ$_3$, आ$_4$, आ$_5$, आ$_6$ के मान जान लेने पर २२७ प्रक्रम की युक्ति से ध्रुवशक्ति ३ विषम होने से चिन्ह बदल देने से आ$_2$, आ$_1$ और आ$_0$ के मान बिना गणना किए ही आ जायँगे ।

गा के मान को यदि स$_4$ के अव्यक्त मानों अर्थात् इ$_1$, इ$_2$, इ$_3$, इ$_4$ के रूप में लाओ तो स्पष्ट है कि गा में गुणय गुणक खण्ड इ$_1$ + इ$_2$ − इ$_3$ − इ$_4$, इ$_2$ + इ$_3$ − इ$_1$ − इ$_4$, इ$_3$ + इ$_1$ − इ$_2$ − इ$_4$ ये होंगे और इ$_1$, इ$_2$, इ$_3$ और इ$_4$ के स्थान में

$$\frac{१}{य - इ_1}, \quad \frac{१}{य - इ_2}, \quad \frac{१}{य - इ_3} \text{ और } \frac{१}{य - इ_4} \text{ क्रम से}$$

इनके उत्थापन से और हर को हटाने के लिये प्रत्येक को $\frac{स_4}{अ_0}$ इससे गुण देने से गा$_य$ में गुणय गुणक रूप खण्ड

$$स_4\left(\frac{१}{य - इ_2} + \frac{१}{य - इ_3} - \frac{१}{य - इ_1} - \frac{१}{य - इ_4}\right) = अ_0ब$$

$$स_4\left(\frac{१}{य - इ_3} + \frac{१}{य - इ_1} - \frac{१}{य - इ_2} - \frac{१}{य - इ_4}\right) = अ_0भ$$

$$\text{स}_{\text{०}}\left(\frac{\text{१}}{\text{य}-\text{इ}_{\text{१}}}+\frac{\text{१}}{\text{य}-\text{इ}_{\text{२}}}-\frac{\text{१}}{\text{य}-\text{इ}_{\text{३}}}-\frac{\text{१}}{\text{य}-\text{इ}_{\text{४}}}\right)=\text{अ}_{\text{०}}\text{म}$$

ये होंगे। इन पर से और $\text{स}_{\text{०}}=\text{अ}_{\text{०}}(\text{य}-\text{इ}_{\text{१}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{२}})$ $(\text{य}-\text{इ}_{\text{३}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{४}})$ मान लेने से

$$\text{ब}=(\text{इ}_{\text{२}}-\text{इ}_{\text{३}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{१}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{३}})-(\text{इ}_{\text{१}}-\text{इ}_{\text{३}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{२}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{४}})$$

$$\text{भ}=(\text{इ}_{\text{१}}-\text{इ}_{\text{४}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{२}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{३}})-(\text{इ}_{\text{२}}-\text{इ}_{\text{३}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{१}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{४}})$$

$$\text{म}=(\text{इ}_{\text{१}}-\text{इ}_{\text{४}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{२}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{३}})+(\text{इ}_{\text{२}}-\text{इ}_{\text{३}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{१}})(\text{य}-\text{इ}_{\text{४}}).$$

और $\text{१२गा}_{\text{य}}=\text{अ}_{\text{०}}^{\text{३}}\,\text{बभम}$। $\text{हा}_{\text{य}}=-\frac{\text{अ}^{\text{२}}}{\text{४८}}(\text{ब}^{\text{२}}+\text{भ}^{\text{२}}+\text{म}^{\text{२}})$

इन पर से अनेक और उपयोगी समीकरण बना सकते हो।

५—न घात के एक ध्रुवशक्तिक बहुपद राशि फ (य,र) में यदि य = दया + तरा, र = द'या + त'रा इनका उत्थापन देते हैं तो फ (य,र) का मान फा (या,रा) होता है और (य,र) का एक दूसरा फल जो स है वह उसी उत्थापन से सा होता है तो सिद्ध करो कि

$$\text{मा}^{\text{न}}\text{फ}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}, -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right) = \text{फा}\left(\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\right)$$

जहां मा परिवर्तन में मध्यस्थ है अर्थात् मा = दत' − द'त।
यहां य = दया + तरा, र = द'या + त'रा

इसलिये माया $=$ त$'$य $-$ तर, मारा $= -$ द$'$य $+$ दर ।

और चलनकलन से

$$\text{मा}\frac{\text{ताया}}{\text{ताय}} = \text{त}', \text{मा}\frac{\text{ताया}}{\text{तार}} = -\text{त}, \text{मा}\frac{\text{तारा}}{\text{ताय}} = -\text{द}', \text{मा}\frac{\text{तारा}}{\text{तार}} = \text{द} ।$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\frac{\text{ताया}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}\frac{\text{तारा}}{\text{ताय}}$$

$$= -\left\{\text{द}'\left(\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}\right) + \text{त}'\left(-\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\right)\right\}$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\frac{\text{ताया}}{\text{तार}} + \frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}\frac{\text{तारा}}{\text{तार}}$$

$$= \text{द}\left(\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}\right) + \text{त}\left(-\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\right)$$

और फ (दया $+$ तरा, द$'$या $+$ त$'$रा) $\equiv$ फा (या, रा)

इसमें या और रा के स्थान में $\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}$ और $-\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}$

क्रम से इनके उत्थापन से ध्रुवशक्ति न होने से

$$\text{मा}^{\text{न}}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}}, -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right) \equiv \text{फा}\left(\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}, -\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}\right) \ldots\ldots\ldots (१)$$

यदि या और रा के स्थान में क्रम से $\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{ता}}{\text{तारा}}$ और $-\frac{१}{\text{मा}}\frac{\text{ता}}{\text{ताया}}$

इनका उत्थापन दें तो

$$\text{मा}^{\text{न}}\ \text{फ}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}},\ -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)\text{स}$$

$$=\text{फा}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तारा}},-\frac{\text{ता}}{\text{ताया}}\right)\text{सा}\ldots\ldots\ldots\ldots(२)$$

यहां $\text{फ}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}},-\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)$, $\text{फा}\left(\frac{\text{ता}}{\text{तारा}},-\frac{\text{ता}}{\text{ताया}}\right)$ से गतिपरम्परासम्बन्धी फलों का ग्रहण किया है अर्थात् फ और फि के मान के उत्थापन से $\frac{\text{ता}}{\text{तार}}$, $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}$, इत्यादि के तो $\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{तार}^{\text{न}}}$, $\frac{\text{ता}^{\text{न}}}{\text{तार}^{\text{न}-१}}$ इत्यादि मान आवेंगे उनसे उतनी बार उन चलराशियों के वश से तात्कालिक सम्बन्ध के मान समझो (चलनकलन का ७० वां प्रक्रम देखो)

(२) यदि तीसरी बहुपद राशि के फ (य, र) और स चलस्पर्द्धी हों जहां मान लो कि दोनों चलस्पर्द्धियों में से एक के समान श हो जाता है और वे ही दोनों चलस्पर्द्धियों के मान या और स और नये पदगुणकों के वश से क्रम से $\text{फा}_{\text{च}}$ (या, रा) और $\text{सा}_{\text{च}}$ होता है जब य और र के परिवर्त्तन से श का एक नया रूप होगा। तो चलस्पर्द्धी क्रम से २२५वें प्रक्रम से

$$\text{मा}^{\text{प}}\ \text{फा}\ (\text{या},\text{रा}) = \text{फा}_{\text{च}}\ (\text{या},\text{रा})\ \text{और}\ \text{मा}^{\text{व}}\ \text{सा} = \text{सा}_{\text{च}}$$

इस रूप के होंगे। (१) इन समीकरणों से आए हुए स्वरूपों का उत्थापन (१) में देने से

$$\text{मा}^{\text{थ}}\ \text{फ}\left(\frac{\text{तास}}{\text{तार}},\ -\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\right) = \text{फा}_{\text{च}}\left(\frac{\text{तासा}_{\text{च}}}{\text{तारा}},\ -\frac{\text{तासा}_{\text{च}}}{\text{ताया}}\right)$$

इस पर से सिद्ध होता है कि श का एक चलस्पर्द्धी

फ$\left(\frac{\text{ता}_\text{र}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}_\text{य}}{\text{ताय}}\right)$ यह है।

इसी प्रकार (२) से सिद्ध होगा कि फ $\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)$स।

यदि यह स न घात का हो तो श का अचलस्पर्द्धी होगा और यदि स न से अधिक घात का होगा तो वही श का चलस्पर्द्धी होगा। यहां श के घात का द्योतक न है अर्थात् श के मान में अव्यक्त का जो सब से बड़ा घात है उसका द्योतक न है।

(१) यदि फ (य,र) = $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4)(\text{य},\text{र})^4$ और फ = फा, स = सा तो श का एक अचलस्पर्द्धी

$$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4)\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)^4 \text{सा}$$

$$= ४८\,(\text{अ}_0\text{अ}_4 - ४\text{अ}_1\text{अ}_3 + ३\text{अ}_2^2) = \text{भा}।$$

(२) यदि स को चतुर्घात समीकरण का चलस्पर्द्धी हा$_\text{य}$ मान लें और फ (य,र) = $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \ldots, \text{अ}_4)(\text{य},\text{र})^4$ तो ऊपर की युक्ति से जब फ (य,र) = श तो

$$(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \text{अ}_3, \text{अ}_4)\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}}, -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right) \text{हा}_\text{य}$$

$$= ७२\,(\text{अ}_0\text{अ}_2\text{अ}_4 + २\text{अ}_1\text{अ}_2\text{अ}_3 - \text{अ}_0\text{अ}_3^2 - \text{अ}_4\text{अ}_1^2 - \text{अ}_2^3) = \text{छा}।$$

(३) सिद्ध करो कि यदि (अ,क,ख,ग) $(\text{य},\text{र})^3$ का चलस्पर्द्धी गा$_\text{य}$ हो तो

$$(\text{अ},\text{क},\text{ख},\text{ग})\left(\frac{\text{ता}}{\text{तार}},\ -\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\right)\text{गा}_{\text{य}}$$

$$= -१२\,(\text{अ}^२\text{ग}^२ - ६\text{अकखग} + ४\text{अख}^३ + ४\text{कग}^३ - ३\text{क}^२\text{ख}^२)$$

६—यदि $(\text{अ}_०, \text{अ}_१, \text{अ}_२, \ldots\ldots, \text{अ}_{\text{न}})\,(\text{य},\text{र})^{\text{न}}$ का अचलस्पर्द्धी फि $(\text{अ}_०, \text{अ}_१, \ldots\ldots, \text{अ}_{\text{न}}$ हो और स कोई (य,र) का फल न वा न से अधिक घात का हो तो

$$\text{फि}\left(\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}},\ \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-१}\text{तार}},\ \frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-२}\text{तार}^२},\ldots\ldots,\frac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{तार}^{\text{न}}}\right)$$

यह स का अचल वा चलस्पर्द्धी होगा।

इसकी सिद्धि के लिये कल्पना करो कि

$$\text{य}=\text{दया}+\text{तरा},\ \text{य}'=\text{दया}'+\text{तरा}',\ \text{र}=\text{द}'\text{या}+\text{त}'\text{रा},$$
$$\text{र}'=\text{द}'\text{या}'+\text{त}'\text{रा}'।$$

फिर (५) वें उदाहरण ही की युक्ति से इन मानों से समीकरणों के बदलने से और उत्थापन से सा = स,

$$\text{य}'\frac{\text{तास}}{\text{ताय}}+\text{र}'\frac{\text{तास}}{\text{तार}}=\text{या}'\frac{\text{तासा}}{\text{ताया}}+\text{रा}'\frac{\text{तासा}}{\text{तारा}}$$

इसलिये उन्हीं संकेतों से $\left(\text{या}'\frac{\text{ता}}{\text{ताया}}+\text{रा}'\frac{\text{ता}}{\text{तारा}}\right)^{\text{न}}\text{सा}$

$$=\left(\text{य}'\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}+\text{र}'\frac{\text{ता}}{\text{तार}}\right)^{\text{न}}\text{स}$$

दोनों पक्षों को फैलाने से

$$\text{फि}\,(\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_\text{न})\,(\text{या}', \text{रा}')^{\text{न}}$$
$$= (\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_\text{न})\,(\text{य}', \text{र}')^{\text{न}}$$

इसलिये २२५ प्रक्रम से

$$\text{फि}\,(\text{घा}_0, \text{घा}_1, \text{घा}_2, \ldots\ldots, \text{घा}_\text{न}) = \text{मा}^{\text{ब}}\,\text{फि}(\text{घ}_0, \text{घ}_1, \text{घ}_2, \ldots, \text{घ}_\text{न})$$

इससे सिद्ध होता है कि $\text{फि}(\text{घ}_0, \text{घ}_1, \text{घ}_2, \ldots\ldots, \text{घ}_\text{न})$ यह स का अचल वा चलस्पर्द्धी जहां $\text{घ}_0 = \dfrac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}}}$, $\text{घ}_1 = \dfrac{\text{ता}^{\text{न}}\text{स}}{\text{ताय}^{\text{न}-1}}$ इत्यादि हैं।

यहां इस प्रकार के जो (य, र) और (य', र') हैं इन्हें स्पर्द्धी चल कहते हैं।

(१) कल्पना करो कि $\text{अ}_0\text{य}^2 + 2\text{अ}_1\text{य} + \text{अ}_2$ यह य के रूपान्तर से $\text{आ}_0\text{य}^2 + 2\text{आ}_1\text{य} + \text{आ}_2$ ऐसा हुआ तो २२६वें प्रक्रम के (१) उदाहरण से

$$\text{आ}_0\text{आ}_2 - \text{आ}_1^2 = \text{मा}^2\,(\text{अ}_0\text{अ}_2 - \text{अ}_1^2) = \text{उ}$$

और ऊपर के समीकरण से

$$\text{या}'^2\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}^2} + 2\text{या}'\text{रा}'\,\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}\cdot\text{तारा}} + \text{रा}'^2\,\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तारा}}$$
$$= \text{य}'^2\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2} + 2\text{य}'\text{र}'\,\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}} + \text{र}'^2\,\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2}$$

अब ऊपर के उ से

$$\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{ताया}^2}\,\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{तारा}^2} - \left(\frac{\text{ता}^2\text{सा}}{\text{तायातारा}}\right)^2$$
$$= \text{मा}^2\left\{\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{ताय}^2}\,\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तार}^2} - \left(\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}}\right)^2\right\}$$

इसे सा का हा सम्बन्धी चलस्पर्द्धी कहते हैं।

(२) ऊपर के उदाहरण में यदि $स = (अ,क,ख,ग)(य,र)^{३}$ हो तो चलस्पर्द्धी कैसा होगा।

यहां $स = अय^{३} + ३कय^{२}र + ३खयर^{२} + गर^{३}$ । इसलिये चलन-कलन से

$$स = अय^{३} + ३कय^{२}र + ३खयर^{२} + गर^{३}$$

$$\frac{तास}{ताय} = ३अय^{२} + ६कयर + ३खर^{२}; \frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} = ६अय + ६कर$$

$$\frac{तास}{तार} = ३गर^{२} + ६खयर + ३कय^{२}; \frac{ता^{२}स}{ताय_{१}} = ६गर + ६खय$$

$$\frac{ता^{२}स}{तायतार} = ६कय + ६खर, \frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} \frac{ता^{२}स}{तार^{२}} = ३६\{(अग + कख) यर + अखय^{२} + कगर^{२}\}$$

$$\frac{ता^{२}स}{ताय^{२}} \frac{ता^{२}स}{तार^{२}} - \left(\frac{ता^{२}स}{तायतार}\right)^{२} = ३६ \{(अख - क^{२})य^{२} + (अग - कख)यर + (कग - ख^{२})र^{२}\}$$

(३) इसी प्रकार सिद्ध करो यदि $स = (अ, क, ग,, घ)(य,र)^{४}$ तो चलस्पर्द्धी

$$= (अख - क^{२})य^{४} + २(अग - कख)य^{३}र + (अघ + २कग - ३ख^{२})य^{२}र^{२} + २(कघ - खग)यर^{३} + (ख + घ - ग^{२})र^{४} ।$$

७—यदि अव्यक्त राशि $शा = सा + अ(यर' - य'र)^{न}$ ऐसा हो जहां

$सा = (अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots, अ_{न})(य,र)^{न}$ और $(य,र)$ और $(य',र')$ परस्पर स्पर्द्धीचल हैं।

यदि श का कोई अचलस्पर्द्धी बनाया जाय तो उसमें अ के भिन्न भिन्न घातों के गुणक य' और र' के ध्रुवशक्तिक फल होंगे वे सब अलग अलग सा के चलस्पर्द्धी होंगे। क्योंकि गुण-गुणित युत वर्णान्तर जब य, और र को बदलेंगे तो

$$\text{सा} = (\text{अ}_0 \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})\ (\text{य}, \text{र})^\text{न}$$

$$= (\text{आ}_0, \text{आ}_1, \text{आ}_2, \ldots\ldots, \text{आ}_\text{न})\ (\text{या}, \text{रा})^\text{न}$$

और $\text{यर}' - \text{य}'\text{र} = \text{म}\ (\text{यारा}' - \text{या}'\text{रा})$। इसलिये $\text{सा} + \text{अ}(\text{यर}' - \text{य}'\text{र})^\text{न}$ यह $(\text{आ}_0, \text{आ}_1, \ldots\ldots, \text{आ}_\text{न})\ (\text{या}, \text{रा})^\text{न} + \text{अमा}^\text{न}\ (\text{यारा}' - \text{या}'\text{रा})^\text{न}$ ऐसा होगा।

इसलिये कोई अचलस्पर्द्धी **फा** दोनों के बनाए जायँ तो अ के घात बृद्धि में २२६ वें प्रक्रम से

$$(\text{फा}_0, \text{फा}_1, \text{फा}_2, \ldots\ldots, \text{फा}_\text{प})\ (१, \text{अ})$$

$$= \text{मा}^{\text{ध्रु}}\ (\text{फि}_0\ \text{फि}_1, \text{फि}_2, \ldots\ldots, \text{फि}_\text{प})\ (१, \text{मा}^\text{न}\text{अ})$$

जिनसे सिद्ध है कि $\text{फा}_\text{थ} = \text{मा}^\text{व}\, \text{फि}_\text{थ}$ ऐसा होगा। इसलिये $\text{फा}_\text{थ}$ यह एक चलस्पर्द्धी है।

यदि $(\text{यर}' - \text{य}'\text{र})^\text{न}$ इसके स्थान में $(\text{क}_0, \text{क}_1, \text{क}_2, \ldots\ldots, \text{क}_\text{न})\ (\text{य}, \text{र})^\text{न}$ को रक्खें तो ऊपर ही की क्रिया से यह सिद्ध कर सकते हो कि

यदि **फा** $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})$ यह $(\text{अ}_0, \text{अ}_1, \text{अ}_2, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न})\ (\text{य}, \text{र})^\text{न}$ इसका अचलस्पर्द्धी हो तो **फा** $(\text{अ}_0 + \text{ञक}_0, \text{अ}_1 + \text{ञक}_1, \ldots\ldots, \text{अ}_\text{न} + \text{ञक}_\text{न})$

इसमें ज के भिन्न भिन्न घातों के गुणक $(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न)$ $(य,र)^न$ और $(क_0, क_1, क_2, \ldots\ldots, क_न)$ $(य,र)^न$ इन दोनों के अचलस्पर्द्धी होंगे।

चलनकलन से यदि ज का घात वृद्धि में **फा** को ले आओ और

$$क_0 \frac{ताफा}{ताअ_0} + क_1 \frac{ताफा}{ताअ_1} + \ldots\ldots + क_न \frac{ताफा}{ताअ_न} = बी_1 \quad \text{तो}$$

$$\textbf{फा}\,(अ_0 + जक_0, अ_1 + जक_1, \ldots\ldots, अ_न + जक_न)$$

$$= \textbf{फा}\,(अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots, अ_न) + जबी_1$$

$$+ \frac{ज^2}{२!} बी_1^2 + \frac{ज^3}{३!} बी_1^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{ज^थ}{थ!} बी_1^थ + \ldots\ldots$$

ऐसा होगा। इस पर से सब अचलस्पर्द्धियों का पता लग जायगा।

८—यदि फे (य,र) और फै (य,र) ध्रुवशक्तिक फल हों तो

$$\begin{vmatrix} \frac{ताफे}{ताय}, & \frac{ताफे}{तार} \\ \frac{ताफै}{ताय}, & \frac{ताफै}{तार} \end{vmatrix}$$

यह कनिष्ठ फल दोनों का चलस्पर्द्धी होगा। क्योंकि यदि दोनों फलों में

य = दया + तरा, र = द'या + त'रा इनका उत्थापन दो तो

फो (या,रा) = फे (य,र), फौ (या,रा) = फै (य,र)

जिनसे $$\frac{\text{ताफो}}{\text{ताया}}=\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताया}}+\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताया}}=\text{द}\,\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}+\text{द}'\,\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}$$

$$\frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}}=\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{तारा}}+\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}\,\frac{\text{तार}}{\text{तारा}}=\text{त}\,\frac{\text{ताफे}}{\text{ताया}}+\text{त}'\,\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}=\text{द}\frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}}+\text{द}'\,\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}},\ \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}}=\text{त}\,\frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}}+\text{त}'\,\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}$$

इसलिये

$$\begin{vmatrix}\frac{\text{ताफो}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{ताफो}}{\text{तारा}}\\[1ex] \frac{\text{ताफौ}}{\text{ताया}}, & \frac{\text{ताफौ}}{\text{तारा}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\text{द}\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}+\text{द}'\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}, & \text{त}\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}+\text{त}'\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}\\[1ex] \text{द}\frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}}+\text{द}'\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}, & \text{त}\frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}}+\text{त}'\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}\end{vmatrix}$$

$$=\text{मा}\left(\frac{\text{ताफे}}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताफै}}{\text{तार}}-\frac{\text{ताफे}}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफै}}{\text{ताय}}\right)$$

इस पर से ऊपर की बात सिद्ध हो जाती है।

इसे जकोबी (Jacobi) ने निकाला है। इसलिये इसे जकोबी का चलस्पर्द्धी कहते हैं।

न चलराशियों के यदि भिन्न भिन्न न फल हों तो भी ऊपर की युक्ति से न संख्या पंक्ति से जो कनिष्ठ फल होगा वह उन समीकरण परम्पराओं का चलस्पर्द्धी होगा।

२२९—चलराशियों का अकरणीगत और ध्रुव-शक्तिक एक फल न है जहाँ ध्रुवशक्ति दो है। इसे एक

ध्रुवशक्ति संबन्धी वर्णों के पृथक् पृथक् फलों के वर्ग योग रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

कल्पना करो कि वह फल $\text{य}_{\text{१}}, \text{य}_{\text{२}}, \dots, \text{य}_{\text{न}}$ राशियों का $\text{भा} = \text{पा}_{\text{१}}\text{य}_{\text{१}}^{\text{२}} + \text{२ बा}_{\text{१}}\text{य}_{\text{१}} + \text{ता}_{\text{१}}$ है, जहां $\text{पा}_{\text{१}}$ कोई स्थिर संख्या, $\text{बा}_{\text{१}}$ एक ध्रुवशक्ति संबन्धी पृथक् पृथक् $\text{य}_{\text{२}}, \text{य}_{\text{३}} \dots \text{य}_{\text{न}}$ चलराशियोंका फल और $\text{ता}_{\text{१}}, \text{य}_{\text{२}}, \text{य}_{\text{३}}, \dots, \text{य}_{\text{न}}$ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है तो

$$\text{भा} = \text{पा}_{\text{१}}\text{य}_{\text{१}}^{\text{२}} + \text{२बा}_{\text{१}}\text{य}_{\text{१}} + \text{ता}_{\text{१}}$$

$$= \left(\text{य}_{\text{१}}\sqrt{\text{पा}_{\text{१}}} + \frac{\text{बा}_{\text{२}}}{\sqrt{\text{पा}_{\text{१}}}}\right)^{\text{२}} + \text{ता}_{\text{१}} - \frac{\text{बा}_{\text{१}}^{\text{२}}}{\text{पा}_{\text{१}}}$$

$$= \left\{\left(\text{य}_{\text{१}} + \frac{\text{बा}_{\text{१}}}{\text{पा}_{\text{१}}}\right)\sqrt{\text{पा}_{\text{१}}}\right\}^{\text{२}} + \text{ता}_{\text{१}} - \frac{\text{बा}_{\text{१}}^{\text{२}}}{\text{पा}_{\text{१}}}$$

$$= \left(\text{या}_{\text{१}}\sqrt{\text{पा}_{\text{१}}}\right)^{\text{२}} + \text{भा}_{\text{१}}$$

यदि $\text{या}_{\text{१}} = \text{य} + \frac{\text{बा}_{\text{१}}}{\text{पा}_{\text{१}}}, \quad \text{भा}_{\text{१}} = \text{ता}_{\text{१}} - \frac{\text{बा}_{\text{१}}^{\text{२}}}{\text{पा}_{\text{१}}}$

यहां $\text{भा}_{\text{१}}$, ना − १ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है। $\text{ता}_{\text{१}}$, ना − १ चलराशियों का ध्रुवशक्तिक फल दो घात का है और $\text{बा}_{\text{१}}$ का जो न − १ चलराशियों का एक घात का ध्रुवशक्तिक फल है, वर्ग करने से वर्ग न − १ चलराशियों का दो घात का ध्रुवशक्तिक फल होगा। इसलिये

$\text{भा}_{\text{१}} = \text{पा}_{\text{२}}\text{य}_{\text{२}}^{\text{२}} + \text{२बा}_{\text{२}}\text{य}_{\text{२}} + \text{ता}_{\text{२}}$ इस प्रकार लिख सकते हो और ऊपर की युक्ति से

$$भा_1 = \left\{ \left(य_2 + \frac{बा_2}{पा_2}\right)\sqrt{पा_2} \right\}^2 + ता_2 - \frac{बा_2^2}{पा_2}$$

$$= \left(या_2\sqrt{पा_2}\right)^2 + भा_2$$

यदि $या_2 = य_2 + \frac{बा_2}{पा_2}$ और $भा_2 = ता_2 - \frac{बा_2^2}{पा_2}$ ।

इसी प्रकार $भा_2$ से $या_3$ और $भा_3$ इत्यादि बनेंगे।

इसलिये $भा = (या_1\sqrt{पा_1})^2 + (या_2\sqrt{पा_2})^2 + (या_3\sqrt{पा_3})^2 + \ldots\ldots + (या_न\sqrt{पा_न})^2$

जहाँ $या_न = य_न$ । इसपर से सिद्ध हुआ कि भा को न राशियों के वर्गयोग के समान बना सकते हो।

२३०—$फ(य) = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \ldots\ldots\ldots + प_{न-1}य + प_न = 0$

इसमें $य^न, य^{न-1}, य^{न-1}$ इत्यादि के मान $य^{न-1}$ और इससे अल्पघातों के रूप में प्रकाश कर सकते हैं क्योंकि

$$फ(य) = 0 = य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \ldots\ldots प_{न-1}य + प_न$$

$$\therefore य^न = -प_1 य^{न-1} - प_2 य^{न-2} \ldots\ldots\ldots - प_{न-1} य - प_न \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

य से गुण देने से

$$य^{न+1} = -प_1 य^न - प_2 य^{न-1} - \ldots\ldots - प_{न-1} य^2 - प_न य$$

$$= -प_१ \left(प_१ \frac{न}{य}^{-१} - प_२ \frac{य}{न}^{२} - \ldots\ldots प_{न-१} य - प^न \right)$$

$$-प_२ य^{न-१} - प^३ य^{न-२} - \ldots\ldots - प_{न-१} य - प_न य$$

(१) से

$$= (प_१^२ - प_२) य^{न-१} + (प_१ प_२ - प_३) य^{न-२} + \ldots\ldots$$
$$+ (य_१ प_{न-१} - प_न) य - प_न$$

इस प्रकार से $य^{न+१}$ का मान $य^{न-१}$ और इससे अल्प घातों के रूप में आया।

फिर दोनों पक्षों को य से गुण देने से $य^{न+२}$ का मान $य^न$ और $य^{न-१}$ इत्यादि एकापचित घातों के रूप में आवेगा। उसमें $य^न$ के स्थान में (१) के उत्थापन से $य^{न+२}$ का मान $य^{न-१}$ और इससे अल्प घातों में आवेगा। इस प्रकार आगे क्रिया फैलाने से य का न से आगे चाहे जौन सा अभिन्न घात का मान य के न – १ और इससे अल्प घात के रूप में प्रकाश कर सकते हैं।

२३१—कल्पना करो कि

$$य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \ldots\ldots + प_{न-१} य + प_न = ० \ldots\ldots\ldots (१)$$

यह एक समीकरण है और मान लो कि

$$र = अ_० + अ_१ य + अ_२ य^२ + \ldots\ldots + अ_म य^म \ldots\ldots\ldots (२)$$

जहां न से अल्प म है और $अ_०, अ_१, अ_२, \ldots, अ_म$ ये स्थिर संख्या हैं जो अभी अविदित हैं।

चाहते हैं कि य का लोप कर र के रूप में एक समीकरण बनावें। समीकरण (२) से स्पष्ट है कि य के जितने मान हैं उनके उत्थापन से उतने ही मान र के होंगे। इसलिये र के रूप में जो समीकरण बनेगा उसमें र का सब से बड़ा घात न ही होना चाहिए।

(२) समीकरण का १, ३,......न घात करने से और घातों में य के न − १ घात से जितने अधिक घात हैं उनका रूप २३० प्रक्रम से य के न − १ और इससे अल्प घात में बनाने से

$$\left.\begin{array}{l} र^{2} = क_{0} + क_{1}य + क_{2}य^{2} + \cdots\cdots + क_{न-1}य^{न-1} \\ र^{3} = ख_{0} + ख_{1}य + ख_{2}य^{2} + \cdots\cdots + ख_{न-1}य^{न-1} \\ \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ र^{न} = ज_{0} + ज_{1}य + ज_{2}य^{2} + \cdots\cdots + ज_{न-1}य^{न-1} \end{array}\right\} \cdots\cdots (३)$$

यहां $क_{0}, क_{1}, \ldots\ldots क_{न-1}$ दो घात का अकरणीगत ध्रुव शक्तिक $अ_{0}, अ_{1}, अ_{2}, \ldots\ldots, अ_{म}$ अव्यक्तों का फल है। $ख_{0}, ख_{1}, ख_{2}, \ldots\ldots, ख_{न-1}$ तीन घात का अकरणीगत ध्रुव शक्तिक $अ_{0}, अ_{1}, अ, \ldots\ldots अ_{म}$ का फल है। इसी प्रकार आगे भी समझ लेना चाहिए।

कल्पना करो कि (१) समीकरण में जितने अव्यक्त मान हैं उनके एकादि घातों का योग १५९ वें प्रक्रम के संकेत से $स_{1}, स_{2}, स_{3}$ इत्यादि हैं और उनके वश से र के जो मान हैं उनके एकादि घातों के योग $सा_{1}, सा_{2}, सा_{3}$ इत्यादि हैं। (२) और (३) इनमें प्रत्येक समीकरण में य के प्रत्येक मान के उत्थापन से और अलग अलग सभों के योग से

$$\left.\begin{array}{l} सा_१ = नअ_० + अ_१स_१ + अ_२स_२ + \ldots + अ_{म-१}स_{म-१} + अ_मस_म \\ सा_२ = नक_० + क_१स_१ + क_२स_२ + \ldots\ldots + क_{न-१}स_{न-१} \\ सा_३ = नख_० + ख_१स_१ + स_२स_२ + \ldots\ldots + ख_{न-१}स_{न-१} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ सा == नज_० + ज_१स_१ + ज_२स_२ + \ldots\ldots ज_{न-१}स_{न-१} \end{array}\right\} ४$$

इस प्रकार र के न विध मानों के एकादि घातों के योग के मान आ गए जिनसे १६०वें प्रक्रम की युक्ति से $र^न + बर^{न-१} + ब_२ र^{न-२} + \ldots\ldots\ldots + ब_{न-१}र + ब_न = 0$ इस अभीष्ट समीकरण में $ब_१$, $ब_२$ इत्यादि गुणकों के मान व्यक्त हो जायंगे।

इस प्रकार र के रूप में अपना अभीष्ट समीकरण बन गया। अथवा (३) में यदि $य, य^२, \ldots\ldots य^{न-१}$ इत्यादि को भिन्न भिन्न अव्यक्त मान लो तो १६६ वें प्रक्रम से $र^२, र^३$ इत्यादि के रूप में $य, य^२$ इत्यादि आ जायँगे। फिर उनका उत्थापन (१) में देने से अभीष्ट समीकरण र के रूप में बन जायगा जिससे र के मान व्यक्त होने से य के मान भी व्यक्त हो जायेंगे। इस विधि को Tochirnhausen ने निकाला है।

२३२—अब $अ_०, अ_१, अ_२, \ldots\ldots अ_न$ जो अभी अविदित हैं इनको इस प्रकार ले सकते हैं जिनके वश से ऊपर र के रूपमें जो समीकरण बना है उसमें कई पद गुप्त हो जायँ। जैसे यदि इच्छा हो कि प्रथम पदके आगे दूसरा, तीसरा,......म संख्यक पद उड़ जायँ तो मान लेना चाहिए कि $सा_१=0$, $सा_२ =0, \ldots\ldots\ldots, सा_न=0$

परन्तु (४) से जब $सा_१, सा_२$ इत्यादि के मान शून्य मान कर $अ_०, अ_१, \ldots, अ_न$ के मान के लिये जब अभीष्ट समीकरण बनाओगे

तब देखोगे कि $सा_1$ में $अ_0, अ_2$ इत्यादि के एक घात हैं। $सा_2$ में दो घात, $सा_3$ में तीन घात, ...और $सा_म$ में म घात हैं। इसलिये $सा_1$ से $अ_0$ का मान $अ_1, अ_2, \ldots\ldots$ के रूप में आवेगा। इसका उत्थापन $सा_2$ में देने से $अ_1$ का मान द्विविध $अ_2, अ_3,$ के रूप में आवेगा। $सा_3$ में इन दोनों मानों का उत्थापन देने से $अ_2$ का मान ६ विध आवेगा।

$अ_0, अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_म$ में किसी एक $अ_म$ का मान व्यक्त मानें तो $अ_{म-1}$ का मान $(म-1)!$ इतना विध आवेगा।

२३३—$य^न + प_1 य^{न-1} + प_2 य^{न-2} + \ldots\ldots\ldots + प_न = 0$

इसमें मान लो कि

$र = अ_0 + अ_1 य + अ_2 य^2 + अ_3 य^3 + अ_4 य^4$

और पिछले प्रक्रमों की युक्ति से कल्पना करो कि र रूप में

$र^न + ब_1 र^{न-1} + ब_2 र^{न-2} + \ldots\ldots + ब_न = 0$

ऐसा समीकरण बना जिसमें २३१ प्रक्रम से स्पष्ट है कि $ब_1, अ_0, अ_1, \ldots\ldots, अ_4$ का एक घात का, $ब_2$ दो घात का, और $ब_3$ तीन घात का ध्रुवशक्तिक फल है। कल्पना करो कि $अ_0, अ_1, \ldots\ldots अ_4$ ऐसे हैं जिनसे

$ब_1 = 0, ब_2 = 0, ब_3 = 0$। अब मानो कि $ब_1 = 0$ इससे $अ_0$ का मान $अ_1, अ_2, अ_3, अ_4$ इनके रूप में जो आया उसका उत्थापन $ब_2$ और $ब_3$ में देने से $ब'_2 = 0, ब'_3 = 0$ ऐसा हुआ। जहां $ब'_2$, दो घात का और $ब'_3$ तीन घात का $अ_1, अ_2, \ldots\ldots अ_4$ के ध्रुवशक्तिक फल हैं। इसलिये २२६ वें प्रक्रम से

$ब'_२ = फ^२ + ग^२ + ह^२ + ज^२ = ०$ ऐसी कल्पना कर सकते हैं। जहाँ फ, ग ह, ज अलग अलग $अ_१, अ_२, अ_३, अ_४$ के एक घात सम्बन्धी फल हैं।

कल्पना करलो कि $फ = ग\sqrt{-१}, ह = ज\sqrt{-१}$

जहाँ दोनों समीकरणों में अलग अलग $अ_१, अ_२, \ldots अ_४$ के एक ही घात सम्बन्धी फल हैं। मानलो कि इन दोनों से $अ_१$ और $अ_२$ के मान जो $अ_३$ और $अ_४$ के रूप में आए उनके उत्थापन से $ब'_३$ का रूप $ब''_३ = ०$ ऐसा हुआ जो कि $अ_३$ और $अ_४$ का तीन घात का ध्रुवशक्तिक फल है। इसमें $अ_३$ और $अ_४$ में से किसी एक का मान कोई इष्ट मान लें तो दूसरे का मान एक घन समीकरण से आ जायगा।

यदि दूसरा, तीसरा और पाँचवाँ पद उड़ाना हो तो ऊपर ही को ऐसी क्रिया करने से अन्त में एक चतुर्घात समीकरण बनेगा।

$र^न + ब_१ र^{न-१} + ब_२ र^{न-२} + \ldots\ldots ब_न = ०$ इसमें यदि र के स्थान में $\frac{१}{र_१}$ रख दें तो $ब_न र_१^न + ब_{न-१} र_१^{न-१} + ब_{न-२} र_१^{न-२} + \ldots\ldots\ldots + १ = ०$ ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें ऊपर ही की युक्ति से अन्त पद से दूसरा, तीसरा और चौथा वा दूसरा, तीसरा और पांचवां पद उड़ा सकते हो।

२३४—२३३ वें प्रक्रम में जो न घात का समीकरण है जिस पर से र के न घात का समीकरण उत्पन्न हुआ है, उसमें यदि न=५ हो तो उसी प्रक्रम की युक्ति से दूसरे, तीसरे और चौथे वा पांचवें पद को उड़ाने से किसी पंचघात समीकरण का

$र^{५} + पार + बा = ०, र^{५} + पार^{२} + बा = ०$ ऐसे दो रूप बना सकते हैं। इसमें यदि $र = \frac{१}{र'}$ ऐसा माना जाय तो दो रूप और $र'^{५} + पा'र'^{३} + बा' = ०$,

$र'^{५} + पा'र'^{३} + बा' = ०$ इस प्रकार के होंगे। इस प्रकार किसी पंचघात समीकरण का चार रूपान्तर कर सकते हो। यह मिस्टर सीरेट (Mr Serret) की कल्पना है। (See his cours d' Algebre Superieure, *Vol* 1, Art 192)

२३५—यदि पंचघात समीकरण $(अ_{०}, अ_{१}, अ_{२}, \ldots\ldots अ_{५})(य, र)^{५}$ ऐसा हो और इसे $क_{१}(य + इ_{१}र)^{५} + क_{२}(य + इ_{२}र)^{५} + क_{३}(य + इ_{३}र)^{५}$ इसके तुल्य करें जहाँ $इ_{१}, इ_{२}$ और $इ_{३}$ $प_{३}य^{३} + प_{२}य^{२} + प_{१}य + प_{०} = ०$ इसमें के अव्यक्त मान हैं। तब तीनों पंच घातात्मक पदों को फैलाने से और दोनों पक्षों में य के समान घातों के गुणकों को समान करने से

$अ_{०} = क_{१} + क_{२} + क_{३}$, $अ_{१} = क_{१}इ_{१} + क_{२}इ_{२} + क_{३}इ_{३}$, $अ_{२} = क_{१}इ_{१}^{२} + क_{२}इ_{२}^{२} + क_{३}इ_{३}^{२}$,

$अ_{३} = क_{१}इ_{१}^{३} + क_{२}इ_{२}^{३} + क_{३}इ_{३}^{३}$, $अ_{४} = क_{१}इ_{१}^{४} + क_{२}इ_{२}^{४} + क_{३}इ_{३}^{४}$, $अ_{५} = क_{१}इ_{१}^{५} + क_{२}इ_{२}^{५} + क_{३}इ_{३}^{५}$।

इनपर से

$$प_{०}अ_{०} + प_{१}अ_{१} + प_{२}अ_{२} + प_{३}अ_{३} = ०$$
$$प_{०}अ_{१} + प_{१}अ_{२} + प_{२}अ_{३} + प_{३}अ_{४} = ०$$
$$प_{०}अ_{१} + प_{१}अ_{३} + प_{२}अ_{४} + प_{३}अ_{५} = ०$$

इन तीनोंके साथ $प_{०} + प_{१}य + प_{२}य^{२} + प_{३}य^{३} = ०$ इसको मिलाने से

$$\begin{vmatrix} १ & य & य & य^{३} \\ अ_{०} & अ_{१} & अ_{२} & अ_{३} \\ य_{१} & अ_{१} & अ_{३} & अ_{४} \\ अ_{२} & अ_{३} & अ_{४} & अ_{५} \end{vmatrix}$$

यह कनिष्ठ फल के रूप में एक समीकरण हुआ जिससे य के मान विदित होने से $इ_{१}, इ_{२}$ और $इ_{३}$ व्यक्त होंगे तब

$$अ_{०} = क_{१} + क_{२} + क_{३}$$

$$अ_{१} = क_{१}इ_{१} + क_{२}इ_{२} + क_{३}इ_{३}$$

$$अ_{२} = क_{१}इ_{१}^{२} + क_{२}इ_{२}^{२} + क_{३}इ_{३}^{२}$$

इनसे $क_{१}, क_{२}$ और $क_{३}$ भी व्यक्त हो जायँगे।

इस प्रकार दिया हुआ पंचघात समीकरण तीन अव्यक्त राशियों के पंचघात के योग के समान हो सकता है।

इसी प्रकार (य, र) के २न − १ घात का ध्रुव शक्तिक फल,

$$क_{१}(य+इ_{१}र)^{२न-१} + क_{२}(य+इ_{२}र)^{२न-१} + \cdots\cdots + क_{न}(य+इ_{न}र)^{२न-१}$$

इसके समान हो सकता जहाँ $इ_{१}, इ_{२}, इ_{३}, \ldots इ_{न}$ •

$प_{न}य^{न} + प_{न-१}य^{न-१} + प_{न-२}य^{न-२} + \cdots\cdots प_{०} = ०$ इसमें अव्यक्त के मान हैं।

यह डाक्टर सिलवेस्टर (Dr. Sylvester) की कल्पना है।

१३६—$फ(य) = प_{०}य^{न} + प_{१}य^{न-१} + प_{२}य^{न-२} + \cdots\cdots + प_{न} = ०$ इस समीकरण के धन मूलों की प्रधान सीमा जाननी है।

कल्पना करो कि अ यह प्रथम पद का गुणक वा उससे अल्प संख्या है और उसके आगे लगातार जितने पदों के धन गुणक हैं उनमें सब से छोटे गुणक के तुल्य वा उससे भी अल्प क है। और आगे जितने ऋण और धन पद हैं उनमें सब से बड़े ऋण गुणक के तुल्य वा उस से बड़ा ग है तो स्पष्ट है कि **फ** (य) अवश्य धन ही रहेगा।

यदि $अय^{न} + क(य^{न-१} + \dots\dots\dots + य^{न-ञ}) [-ग$

$य^{न-ञ-१} + \dots\dots + १$

जहाँ सबसे पहिला ऋण पद $य^{न-ञ-१}$ है। ऊपर का मान गुणोत्तर श्रेढीसे

$$अय^{न} + क\frac{य^{न} - य^{न-ञ}}{य - १} - ग\frac{य^{न-ञ} + \dots\dots + १}{य - १}$$ यह होगा।

यदि $य > १$ तो इसका मान तब धन होगा यदि

$\{अ(य-१) + क\}य^{न} - (क)य^{न-ञ} + ग$ यह अथवा

$\{अ(य-१) + क\}य^{ञ} - (क + ग)$ यह शून्य वा धन हो

(१) इसमें यदि $क = ०$ और सब से बड़ा ऋण गुणक $= ग$ तो **फ** (य) धन होगा

यदि $अ(य-१)\, य^{ञ} - (क + ग)$ यह वा $अ(य-१) - ग$ धन हो अर्थात् यदि

$य = १ + \frac{ग}{अ}$ वा य, $१ + \frac{ग}{अ}$ इससे बड़ा हो। इससे ५६ वें प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(२) मान लो कि $क = ०$ और सब से बड़ा ऋण गुणक $= ग$ तो फ (य) धन होगा।

यदि $अ(य-१)य^{अ} - ग$ यह धन हो अर्थात् यदि $अ(य-१)^{अ+१} - ग$ यह धन हो

अर्थात् यदि य, $१ + \left(\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{अ+१}}$ इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। इससे ५८वें प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

(३) मान लो कि अ = ० तो फ (य) धन होगा यदि $कय^{अ} - (क+ग)$ यह धन हो अर्थात् य, $\left(१+\frac{ग}{क}\right)^{\frac{१}{अ}}$ इसके तुल्य वा इससे अधिक हो। यह एक नई सीमा है जो (२) से अल्प होगी यदि अ अर्थात् प्रथम पद के गुणक $प_०$ से क बड़ा होगा।

(४) यदि क से अ बड़ा न हो तो क के स्थान में अ के उत्थापन से फ (य) धन होगा यदि $\{अ(य-१)+अ\} य^{अ} - (अ+ग)$ यह धन वा शून्य हो अर्थात् यदि य, $\left(१+\frac{ग}{अ}\right)^{\frac{१}{अ+१}}$ इसके तुल्य वा इससे बड़ा हो। यदि अ से छोटा क हो तो (३) से जो सीमा होगी उससे यह अल्प आवेगी।

(५) यदि अ > ग तो (२) से सीमा $१+(१)^{\frac{१}{अ+१}} = २$ होगी।

(६) यदि क > ग तो (३) से सीमा $२^{\frac{१}{अ}}$ यह होगी।

(७) यदि अ > ग और क > ग तो (४) से सीमा $२^{\frac{१}{अ+१}}$ यह होगी।

यह प्रोफेसर डिमार्गन की कल्पना है।

२३७—$अ + क\sqrt{-१} = इ\,(कोज्या\,अ_१ + ज्या\,अ_१\sqrt{-१})$

जहां $इ = \sqrt{अ^2 + क^2}$ और स्पज्ञ$_1 = \frac{क}{अ}$ ।

इ को मध्यस्थ कहते हैं (१४वां प्रक्रम देखो) और $_1$ कोण को असम्भव संख्या का उपकरण कहते हैं।

कल्पना करो कि मू या और मू रा लम्ब रूप दो अक्ष हैं और अक्षों के धरातल में एक आ विन्दु ऐसा है कि आ मू या$=अ_1$ और मू आ$=इ$, तो मू आ रेखा को मान लो कि $अ+क\sqrt{-1}$ इसका द्योतक है। $\sqrt{-1}$ को लाघव से । इस चिन्ह से प्रकाश करते हैं।

और $इ=$मध्य.$(अ+।क)$, $अ_1=$उप.$(अ+।क)$ ऐसा समझ रखो।

२३८। ऊपर की परिभाषा से कल्पना करो कि मू. आ $अ+।क$ और मू. ओ$=$मू. आ $+।क'$ तो मू. आ का मान इ के तुल्य और आ मू या$=अ_1$ होगा।

∴ मू मा = इ कोज्या $अ_१$ = अ = भुज।

मू आ मा = इ ज्या $अ_१$ = क = कोटि।

ऊपर ही की परिभाषा से अ′ + ι क′ का मध्यस्थ इ′ और उपकरण अ′ हो तो मू ओ का मान = इ′ और ओ मू या = $अ'_१$।
और अ + ι क + अ′ + ι क′ = अ + अ′ + ι (क + क′)

इसलिये कहेंगे कि दोनों असंभवों के योग रूप असंभव में भुज = अ + अ′ और कोटि = क + क′ होगी। जिस विन्दु के ये भुज, कोटि हैं उस विन्दु के जानने के लिये आ से आ का रेखा मूओ के समानान्तर और तुल्य बनाओ और का से मू या पर लम्ब काना और आ से काना पर लम्ब आपा करो तो आपा = अ′ और कापा = क′। इसलिये का विन्दु दोनों असंभव संख्या के योग को प्रकाश करेगा और ऊपर की परिभाषा से

मू का = मध्य {अ + अ′ + ι (क + क′)}, यामूका = उप {अ + अ′ + ι(क + क′)} इसलिये दो असम्भव संख्याओं का योग जानने के लिये एक को पूर्व परिभाषा से मू आ से प्रकाश करो और इसके आ प्रान्त से दूसरी को आ का से प्रकाश करो जहाँ आ का दूसरी के मध्यस्थ के तुल्य है और मू या अक्ष से दूसरी के उपकरण के तुल्य कोण बनाता है तो मू का दोनों असंभवों के योग को प्रकाश करेगी। मू आ + आ का > मू का; इसलिये दोनों के मध्यस्थों का योग, योग रूप असंभव संख्या के मध्यस्थ से अधिक होता है।

इसी प्रकार यदि तीसरी असंभव संख्या अ″ + ιक″ को मू औ से प्रकाश करें और पहिली दो के योग मू का में मिलाना चाहो तो मू औ के समानान्तर और तुल्य का खा खींचो और मू से खा

तक रेखा कर दो। तो ऊपर ही की युक्ति से मू आ, मू ओ' और मू औ असंभवों का योग मू खा के समान होगा यहां भी योग का मध्यस्थ मू खा के समान होगा और रेखागणित से मू का+काखा, मू खा से अधिक होगा। इस प्रकार आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि असंभव संख्याओं के मध्यस्थ के योग से उन असंभव संख्याओं के योग का मध्यस्थ छोटा होता है।

इसी प्रकार यदि मू का में मू ओ को घटाना हो तो मू का को जान कर का से विपरीत दिशा में मू ओ के समानान्तर और तुल्य का आ के बनाने से मू आ को कहेंगे कि दोनों का अन्तर है।

२४१। असम्भवों का गुणन और भजन—

कल्पना करो कि

$$\text{गुण्य} = \text{अ} + \iota\text{क} = \text{इ}\,(\text{कोज्या अ}_1 + \iota\text{ज्या अ}_1)$$

$$\text{गुणक} = \text{अ}' + \iota\text{क}' = \text{अ}\,(\text{कोज्या अ}'_1 + \iota\text{ज्या अ}'_1)$$

डे माइवर (De Moivre) के सिद्धान्त से

$$(\text{अ} + \iota\text{क})\,(\text{अ}' \div \iota\text{क}') = \text{इइ}'\{\text{कोज्या}\,(\text{अ}_1 \div \text{अ}'_1) + \iota\text{ज्या}(\text{अ}_1 + \text{अ}'_1)\}$$

इससे सिद्ध होता है कि दो असंभवो का गुणन फल एक असंभव संख्या है जिसमें मध्यस्थ गुण्य गुणकों के मध्यस्थ के गुणन फल तुल्य और उपकरण दोनों के उपकरणों के योग तुल्य होता है।

इसी प्रकार

$$\frac{अ+ꜝक}{अ'+ꜝक'}=\frac{इ}{इ'}\left\{ \text{कं ज्या }(अ_1-अ'_1)+ꜝ\text{ज्या }(अ_1-अ'_1) \right\}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि दो असंभवों के भजन में लब्धि एक असंभव संख्या होती है जिसमें मध्यस्थ भाज्य के मध्यस्थ में भाजक के मध्यस्थ का भाग देने से जो लब्ध हो, वह होता है और उपकरण, भाज्य के उपकरण में भाजक के उपकरण को घटा देने से जो शेष बचता है वह होता है।

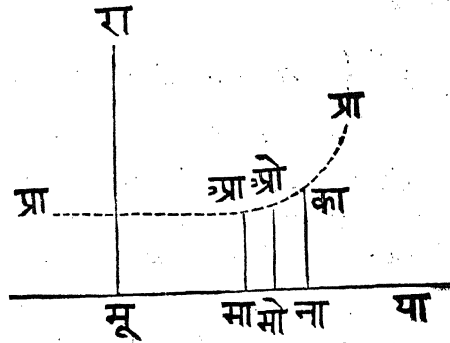
गुणन की क्रिया से स्पष्ट है कि $(अ+ꜝक)^{न}$ यह एक प्रकार की आ+ꜝका ऐसी असंभव संख्या होगी जहाँ आ और का दोनों संभव संख्या हैं।

इसी प्रकार

$$अ_0ल^{न}+अ_1ल^{न-1}+अ_2ल^{न-2}+\ldots+अ_{न-1}ल+अ_{न}$$

इस बीजगणितीय बहुपदराशि में जहाँ ल के घातों के गुणक संभव वा असंभव संख्या हैं। ल के स्थान में अ+ꜝक का उत्थापन दें तो योग और गुणन की युक्ति से स्पष्ट है कि बहु-पदराशि एक आ+ꜝका ऐसी असंभव संख्या होगी। इसमें यदि आ और का दोनों शून्य हों तो वह बहुपदराशि भी शून्य के समान होगी।

(१५ वां प्रक्रम देखो)

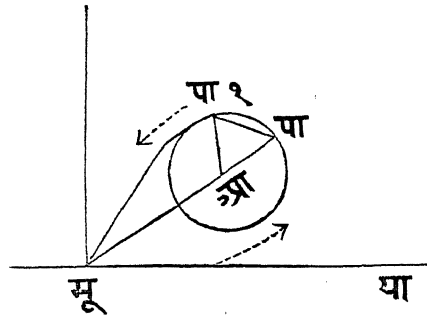
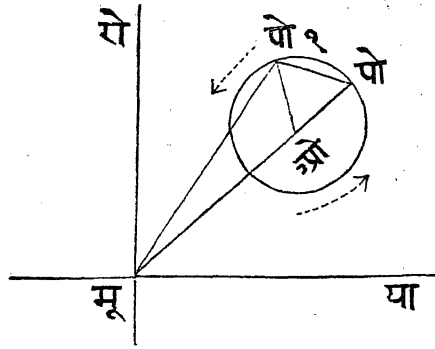
२४२—यदि श=फ(ल) ऐसा एक समीकरण हो और मू या, और मू ग परस्पर लम्बरूप अक्ष कल्पना कर मू से मू मा=अ बनावें और अ का उत्थापन फ (य) में (ल) के स्थान में देकर

फ (अ) को मा अ के तुल्य काट लें जो कि मू या पर लम्ब है तो कहेंगे कि जब ल=अ तो फ (ल)=आमा । इसी प्रकार जब ल=मू ना तो फ(ल)=ना का—इस प्रकार यदि ल की मू से या की ओर धन और इसके विरुद्ध दिशा की ओर ऋण गणना समझें और मू या के ऊपर रा की ओर धन गणना और इसके विरुद्ध ऋण गणना समझें तो ल के स्थान में $-\infty$ और $+\infty$ के बीच सब संभव संख्याओं का उत्थापन देने से जो फ (ल)=श के भिन्न भिन्न धन वा ऋण मान होंगे ऊपर की युक्ति से या के अग्रों के ऊपर उन उन मानों के तुल्य लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रों में गत एक प्रा आ का गा वक्र रेखा होगी जिसे फ (ल) की वक्र रेखा कहते हैं। इसके बलसे किसी ल के मान में फ(ल) का मान जान सकते हो। जैसे जब ल=मू मो=ख तब फ(ल) का मान जानना हो तो मू से धन गणना या की ओर ख संख्या के तुल्य मूमो काट लेने से मो पर एक ओ मो लम्ब खड़ा करने से यह जहाँ वक्र के ओ विन्दु पर लगा वहां से मो तक

ओ मो का नापने से प्रमाण हो वही ख तुल्य ल के मान में फ(ल) अर्थात् फ (ख) का मान होगा।

२४३। ऊपर के प्रक्रम से फ (ल) की वक्र रेखा तभी तयार हो सकती है जब ल —∞ और + ∞ के बीच संभव संख्यात्मक हो और इससे अन्यथा स्थिति में अर्थात् सर्वत्र चाहे ल संभव वा असंभव हो ऊपर की युक्ति से फ (ल) की वक्र रेखा नहीं बन सकती। इसलिये सर्व साधारण के लिये अब युक्ति लिखते हैं। कल्पना करो कि

$$फ (ल) = अ_0 ल^न + अ_1 ल^{न-1} + अ_2 ल^{न-2} + \ldots\ldots + अ_{न-1} ल + अ_न$$

जहाँ ल = य − ιर जहाँ य और र दोनों के मान में जहाँ तक संभव है सब संभाव्य संख्या का उत्थापन दे सकते हैं। य + ιर = ल ऐसे ल को जिसके मान में संभव और असंभव दोनों चल रहते हैं **मिश्रचल** कहते हैं। इसमें यदि र = ० और य के स्थान में —∞ और + ∞ के बीच के मानों का उत्थापन दें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से ल के संभव मान में फ (ल) की वक्र रेखा बनेगी; इसलिये मिश्रचल ल के फल की जो वक्र रेखा होगी उसी का एक विशेष अर्थात् संभव ल के मान में जो ऊपर के प्रक्रम से वक्र रेखा होगी वह एक रूप है। इस लिये मिश्रचल के फल की जो वक्र रेखा होगी वह सर्व साधारण के लिये उपयेागी है।

कल्पना करो कि ल = य + ιर इसका कोई एक मान २३६ प्रक्रम से मू पा अर्थात् पा विन्दु पर है और ल के स्थान इस

मान का उत्थापन देने से जो फ (ल) का मान २४० प्रक्रम से आ + ι का होगा उसका मान साफ साफ समझने के लिये अलग २३६ प्रक्रम से पो विन्दु पर है अर्थात् मू' पो है। इसी प्रकार ल के दूसरे मान में अर्थात् य + ιर के दूसरे मान में इसका प्रमाण $प_1$ को समझो और उसके वश से फ (ल) का मान जो असंभव होगा वह $पो_1$ है। इस प्रकार से प्रत्येक य + ιर के भिन्न

भिन्न मान में भिन्न भिन्न प, प$_1$ इत्यादि विन्दु से एक तीर के मुख दिशा की ओर घूमता हुआ वक्र बनेगा जिसे य + ιर का वक्र कहेंगे और इसके वश से एक फ (ल) का पो पो$_1$ वक्र बनेगा जिसका घुमाव भी यहां पर तीर के मुख की ओर मान लिया है।

कल्पना करो कि ल के य + ιर मान का द्योतक प और य' + ιर' मान का द्योतक प$_1$ विन्दु है तो

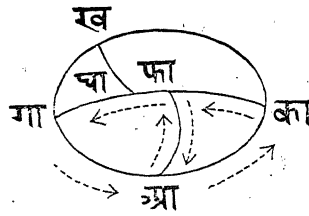
ल = य + ιर = श्रु (कोज्याष + ιज्याष) ल' = य' + ιर'
= श्र'(कोज्याष' + ιज्याष') मू प$_1$ मू प और प प$_1$ का योग है (२३६ प्रक्रम से)।

इसलिये पप$_1$ को ल की असंभव गति कहेंगे और यदि ल' = ल + च' जहां च = श्रु$_1$ (कोज्याष$_1$ + ιज्याष$_1$) और च में श्रु$_1$ = पप' और ष$_1$ च का उपकरण है अर्थात् मू या अक्ष से पप$_1$ रेखा जो कोण बनाती है, उसका मान है।

मू प$_1$—मू प को ल के मध्यस्थ की गति कहते हैं जो कि श्रु'—श्रु के तुल्य है और ष'—ष को ल के उपकरण की गति कहते हैं। और च को जिसे श्रु$_1$ (कोज्याष$_1$ + ιज्याष$_1$) इसके तुल्य ऊपर मान लिया है, ल की गति कहते हैं।

कल्पना करो कि य, र के भिन्न भिन्न मान से प एक सीमित वक्र बनाता है। यदि घूमते घूमते प फिर अपने स्थान पर पहुँचेगा तो प के मध्यस्थ का मान फिर उसी प्रथम मान के तुल्य होगा और उपकरण भी वही होगा जो कि प्रथम में था। यदि मू विन्दु वक्र के बाहर हो तो और यदि मू वक्र के

भीतर पड़ जायगा तो ऊपकरण का मान प्रथम मान से २π तुल्य बढ़ जायगा अर्थात् उपकरण की गति तब २π होगी।

यदि मिश्रचल दो विरुद्ध दिशाओं में चल कर एक ही रेखा को चाहे वह वक्र वा सरल हो उत्पन्न करे तो एक ओर चलने में जितनी उपकरण की गति धन होगी उतनी ही विरुद्ध दिशा में चलने से ऋण होगी; इसलिये समग्र गति शून्य होगी। इस पर से नीचे का सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

कल्पना करो कि आ का ख गा क्षेत्र का का गा, आ फा, घाखे, इत्यादि रेखाओं से कई विभाग कर डाला तो आ स्थान से तीर की ओर से क्षेत्र की परिधि पर चलते हुए प विन्दु की परिधि के पूरे भ्रमण से जो उपकरण की गति होगी वही सब क्षेत्र खण्डों की प्रत्येक सीमा पर उसी चाल से घूम आने पर भी उपकरण की गति होगी, क्योंकि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर क्षेत्र खण्डों की जितनी सीमायें हैं उन पर परस्पर विरुद्ध दिशा से दो बेर चलने से ऊपर की युक्ति से समग्र उपकरण की गति उतने

चलन में शून्य होगी। जैसे अ का फ क्षेत्र खण्ड की सीमा पर अ से तीरों की ओर चलने से जिस दिशा में प, फा विन्दु से चल कर अ पर आवेगा उससे विरुद्ध अ से फा की ओर अ फा गा क्षेत्र खण्ड की सीमा पर घूमने के लिये चलना पड़ेगा। इस प्रकार भीतर जितनी सीमायें हैं उन पर विरुद्ध दिशा से दो बेर चलने में तत्संबन्धी उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। केवल बाहर की सीमाओं पर एक बेर चलने से तत्संबन्धी समग्र गति वही होगी जो कि बड़े क्षेत्र की समग्र परिधि घूमने से उत्पन्न होती है। क्योंकि सब क्षेत्र खंडों की बाहरी सीमाओं का योग बड़े क्षेत्र की परिधि ही है।

२४४। कल्पना करो कि मिश्रचल ल, $ल_0$ मान से चलना आरम्भ किया और इसकी अल्पगति $च = अ_1(कोज्यष_1 + ज्याष_1)$ है तो

$$फ(ल) = फ(ल+च) = फ(ल) + फ'(ल_0)च + फ''(ल_0)\frac{च^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$फ(ल) \text{ की गति} = फ(ल_0+च) - फ(ल_0)$$

$$= फ'(ल_0)च + फ''(ल_0)\frac{च^2}{1.2} + फ''(ल_0)\frac{च^3}{3!} + \cdots$$

इस में च के प्रत्येक घात के गुणक प्रसिद्ध असंभव संख्या हैं जिनके मध्यस्थ यदि अ, क, ग,… मान लिए जायँ तो २४१ प्रक्रम से, क्रम से पदों के मध्यस्थ $अअ_1$, $कअ_1^2$, $गअ_1^3$,… होंगे और इन मध्यस्थों के योग से २४० वें प्रक्रम से इनके योग $फ(ल_0+च) - फ(ल_0)$ इसका अर्थात् फ(ल) के गति का मध्यस्थ छोटा होगा; इसलिये $अ_1$ का ऐसा छोटा मान मान सकते

हैं जिससे उससे भी छोटा फ (ल) की गति का मध्यस्थ होने से फ (ल) की गति चाहे जिस निर्दिष्ट संख्या से छोटी हो सकती है। क्योंकि जैसा जैसा मध्यस्थ छोटा होता है असंभव संख्या का मान भी वैसा वैसा छोटा होता है (१५ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि जैसा जैसा मिश्रचल, ल चलेगा वैसावैसा फ (ल) भी चलेगा अर्थात् मिश्रचल ल बढ़ता चलेगा तो फ (ल) भी बढ़ता जायगा और यदि ल घटता चलेगा तो फ (ल) भी घटता जायगा।

इसलिये यदि पा विन्दु घूम कर एक वक्र बनावेगा तो पो भी घूम कर उसी दिशा से एक वक्र बनावेगा और पा घूमते घूमते जब फिर अपने मूल स्थान पा पर पहुँचेगा तो उसी समय पो भी अपने वक्र में घूम कर फिर अपने मूल स्थान पो पर पहुँचेगा। (२४३ वां प्रक्रम का क्षेत्र देखो)। अब प्रकृत में इस बात का विचार करना है कि यदि पा चल कर एक छोटा वक्र बनावे तो उतने समय में पो चल कर जो अपने वक्र की परिधि पर घूम कर अपने मूल स्थान पर आवेगा उस समय फ (ल) के उपकरण की क्या गति होगी।

कल्पना करो कि आ एक विन्दु है जिसका भुज=$य_0$ और कोटि $र_0$ है तो $ल=य_0+\iota र_0$ (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) अब इस विचार में दो भेद हैं।

(१) जब $य_0+\iota र_0$ यह फ (ल)=० इसमें का कोई अव्यक्त-मान नहीं है अर्थात् ल के स्थान में $य_0+\iota र_0=ल_0$ के उत्थापन से फ ($ल_0$) का मान जब शून्य से भिन्न मू' श्रो है।

(२) जब फ (ल)=० इसका एक मूल $य_0+\iota र_0$ है अर्थात् ल के स्थानमें $य_0+\iota र_0=ल_0$ इसके उत्थापन से जब फ ($ल_0$)=०।

(१) स्थिति में आ संबन्धी मान फ ($ल_०$) का ओ कल्पना करो (२४३ वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) जहां मू′ ओ शून्य नहीं है। मान लो कि ल=$ल_०$+च जहां च=$श्रु_१$(कोज्याष$_१$+ $\imath$ज्याष$_१$) और कल्पना करो कि पा जो कि ल का द्योतक है आ के चारो ओर एक बहुत ही छोटा वक्र बनाता है। पो जो कि फ (ल) का द्योतक है जब आ से चल कर पा बिन्दु $पा_१$ पर पहुँचा अर्थात् जब ल की गति का मध्यस्थ आ पा=$श्रु_१$ हुआ उस समय ओ से चल कर $पो_१$ पर पहुँचा। इसलिये उस समय फ (ल) की गति ओ $पो_१$ से द्योतित होगी अर्थात् फ (ल) के गति का मध्यस्थ ओ $पो_१$ होगा जो कि इसी प्रक्रम के आदि में लिखी हुई युक्ति से $श्रु_१$ को बहुत छोटा मानने से एक निर्दिष्ट संख्या मू′ ओ से सर्वदा छोटा होगा। इसलिये $श्रु_१$ को ऐसा छोटा मान सकते हैं कि पा आ की चारो ओर एक बहुत छोटा वक्र बनावे जिसके वश फ (ल) का द्योतक पो जो ओ की चारो ओर घूम कर वक्र बनाता है उसके बाहर मू′ बिन्दु पड़े। इस पर से यह सिद्ध होता है कि पा जो ऐसे वक्र में घूमा है जिसके अन्तर्गत कोई ऐसा ल का मान नहीं है जिसके उत्थापन से फ (ल)=० हो तो तत्सम्बन्धी फ(ल) का द्योतक पो जो वक्र बनावेगा उसके बाहर मू′ के पड़ जानेसे उस समय फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी (२४३ प्रक्रम देखो)।

(२) स्थिति में मानो कि फ (ल)=० इसका एक मान जो इसमें म वार आया है वह $य_०$+ $\imath र_०$=$ल_०$ यह है तो

$$फ(ल)=(ल-ल_०)^{म}\ फा\ (ल)=च^{म}फा\ (ल)$$

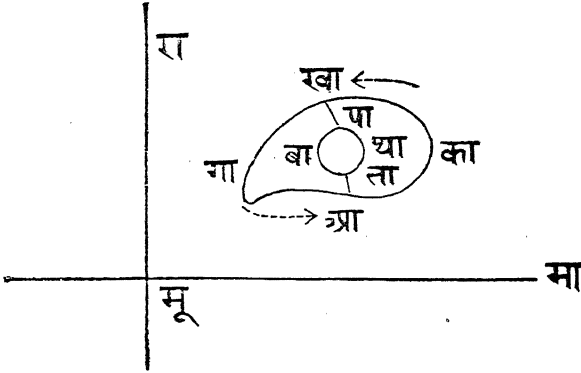
$$=श्रु_१^{म}\ (कोज्यामष_१+\imath ज्यामष_१)\ फा\ (ल)$$

इस स्थिति में म् ओ=०इसलिये जब या एक सीमित वक्र आ की चारो ओर बनावेगा उतने ही में अपने मूल स्थान पर पहुँचेगा। इसलिये फ (ल) के उपकरण की गति सीमित वक्र के भीतर मू' के पड़ जाने से २ का अपवर्त्य होगी जो कि ऊपर के समीकरण से

ड प. फ (ल) =(मस, + उप फा (ल) यह समीकरण २४१ प्रक्रम से बनता है इस पर से विदित हो सकती है। क्योंकि फ (ल) के उपकरण की गति,=गति (मव,) + फा (ल) के उपकरण की गति, परन्तु फा (ल)=०इसका कोई मान या के सीमित वक्र के अन्तगत है; इसलिये (१) स्थिति से फा (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी और पा के एक बेर आ के चारो ओर भ्रमण करने स ओर अ, की प्रवृत्ति आ मूल विन्दु ही के होने से प, की गति २ होगी। इसलिये इसे म से गुण देने से फ (ल) के उपकरण की गति २ म हुई। इससे सिद्ध हुआ कि यदि पा बहुत छोटा एक सीमित वक्र बनावे जिससे अन्तर्गत फ (ल)=०इस एक अ मूल जो कि म वार है, प अ हो तो फ (ल) के उपकरण की वृद्धि २म होगी।

२४५। काशी का सिद्धान्त (Cauchy's Theorem)

जब ल दो विरुद्ध दिशा में चल कर एक ही रेखा को बनावेगा (२४२ वां प्रक्रम देखो); इसलिये फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य होगी। जैसा कि उसी प्रक्रम में एक क्षेत्र के भीतर कई क्षेत्र खण्डों को बनाकर दिखला आए हैं। इसलिये समग्र क्षेत्र खण्डों की सीमा पर ल के चलने से जो ल के उपकरण की गति होगी वह पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमा पर

ल के घूमने से जो ल के उपकरण की गति होगी उसके तुल्य होगी, इसलिए क्षेत्र खण्डों के वश से जो फ (ल) अपने क्षेत्र के भीतर अनेक क्षेत्र खण्ड बनावेगा उनकी सब सीमाओं के वश से वही फ (ल) के उपकरण की गति होगी जो फ (ल) के पूरे क्षेत्र की बाहरी सीमाओं पर चलने से उत्पन्न होती है।

कल्पना करो कि या रा के धरातल में एक कोई सीमित वक्र है। और पहिले मानो कि इसके भीतर ल के जो अनेक मान हैं किसी के वश से फ (ल)=० यह ठीक नहीं होता तो २४२ प्रक्रम के (१) से कहेंगे कि चाहे वक्र के भीतर कितने ही क्षेत्रखण्ड किए जायँ और सभों की सब सीमाओं पर वा बड़े वक्र की परिधि पर ल चले परन्तु फ (ल) के उपकरण की समग्र गति शून्य ही होगी। दूसरी बार ऐसा मानो कि वक्र के भीतर एक ऐसा विन्दु है जिसके वश से जो ल होगा वह फ (ल)=० इसके एक मूल के, जो कि म वार आया है,

तुल्य है। वक्र के भीतर एक बहुत छोटे सीमित वक्र पा बा ता था को मान लो कि इस विन्दु को चारो ओर से घेरे हुए है अर्थात् इसके भीतर में वह विन्दु पड़ा है तो वक्र की आ का खा गा परिधि के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति होगी वह आ का खा या था ता, खा गा आ ता बा पा, पा बा ता था के ऊपर ल के चलने से जो फ (ल) के उपकरण की भिन्न भिन्न गति होंगी उनके योग के तुल्य होगी। परन्तु पहिले दो क्षेत्र खण्डों के बाहर उस विन्दु के पड़ जाने से तत्सम्बन्धी गति शून्य होगी और तीसरे के भीतर उस विन्दु के पड़ जाने से उसकी परिधि पर वा बड़े क्षेत्र की परिधि आ का खा गा पर ल के चलने से २४२ प्रक्रम के (२) स्थिति से फ (ल) के उपकरण की समग्र गति २ म ग होगी। इसी प्रकार यदि बड़े क्षेत्र की परिधि के भीतर दूसरी तीसरी इत्यादि ऐसे विन्दु हों जिनके वश से जो ल के मान भिन्न भिन्न होंगे वे क्रम से फ (ल) = ०इसके उन मूलों के समान हों जो क्रम से समीकरण में म′ म″ इत्यादि वार आए हों तो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति = २ ग (म + म′ + म″ + इत्या) यह होगी। इस पर से काशी ने यह सिद्धान्त निकाला—

यदि मिश्रचल ल एक सीतिम वक्र के भीतर हो और उन ल के मानों के भीतर जानना हो कि फ (ल) = ०इसके कितने मूल पड़े हैं तो उस वक्र की परिधि पर ल के चलाने से जो फ (ल) के उपकरण की समग्र गति उत्पन्न हो उसमें २ ग के भाग देने से लब्धि निकालो। लब्धि की संख्या जो हो उतने ही कहेंगे कि क्षेत्र फल के भीतर के ल मानों के बीच फ(ल)=० इसके मूल है।

२४६। कल्पना करो कि मिश्रचल ल का अकरणी गत घन

$$फ (ल)=अ_0 ल^न + अ_1 ल^{न-1} + अ_2 ल^{न-2} + \cdots + अ_{न-1} ल + अ_न$$

यह एक फल न घात का है। इसमें यदि फ (ल)=० तो जानना है कि संभव और असंभव मिल कर ल के कितने मान होंगे। कल्पना करो कि ल एक ऐसे बड़े वृत्त को बनाता है जिसके अन्तर्गत ही सब ल के मान पडे हैं। उसके बाहर कोई भी ल का मान नहीं पड़ा है। यदि

$$फ (ल)=ल (अ_0 + अ_1 ल' + अ_2 ल'^2 + \cdots + अ_न ल'^न)$$
$$=ल^न फा (ल'),\ जहां\ ल'=\frac{1}{ल}$$

ऐसा लिखें तो ल', जिसका मध्यस्थ ल के मध्यस्थ के हरात्मक मान के तुल्य है वह, जब ल एक बड़ा वृत्त बनावेगा, तब एक छोटा वृत्त बनावेगा। बड़ा वृत्त बड़े से बड़ा ऐसा बना सकते हैं जिसके वश से ल का मध्यस्थ बहुत बड़ा और ल' का ऐसा छोटा हो सकता है कि जिसके वश से ल' जो छोटा वृत्त बनावेगा उसके अन्तर्गत फा (ल',=० इसका कोई मूल न हो तब फ (ल) = $ल^न$ फा (ल') इससे

फ (ल) के उपकरण की गति। परन्तु फा (ल')=० इसका कोई मू ल' के छोटे वृत्त के भीतर नहीं है; इसलिये फ (ल) के उपकरण की गति= $ल^न$ के उपकरण की गति+फा (ल) के उपकरण की गति = $ल^न$ के उपकरण की गति।

परन्तु यदि ल=$अ_उ$ (कोज्या ष+ ιज्याष) तो $ल^न$=$अ_{उ न}$ (कोज्या न ष+ ιज्या नष) इसलिए ष की वृद्धि परिधि पर एक बेर पूरा घूमने से २π होगी। इसलिए फ (ल) के उपकरण की

समग्र गति = न × २π, इसमें २π का भाग देने से फ (ल)=० इसमें ल मानों की संख्या न होगी। इस प्रकार काशी के सिद्धान्त से सिद्ध हुआ कि किसी न घात समीकरण में अव्यक्त का मान न विध होगा जो कि २४ वें प्रक्रम में अनुगम और अनुमान से सिद्ध किया है।

ध्यान देकर देखो तो यह सिद्धान्त समीकरण मीमांसा में सब सिद्धान्तों का मूल सिद्धान्त है। इसी पर से और और सिद्धान्तों की सृष्टि हुई है। और इसी पर से यह भी सिद्ध होता है कि प्रत्येक समीकरण में कुछ न कुछ अव्यक्त का मान रहता है जिसके उत्थापन से वह समीकरण, फ (ल)=० ऐसा होगा।

२४७। (१) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग ४ संख्या के तुल्य होता है ? इस प्रश्न को साधारण बीजगणित की युक्ति से ऐसे करते हैं। मान लो कि वह संख्या य है तो आलाप से $य^2 = ४$ ∴ $य^2 - ४ =$ तब गुणय गुणक खण्ड वा वर्ग समीकरण की युक्ति से $य = \pm २$ अर्थात् कहोगे कि वह संख्या धन वा ऋण २ है। इस तरह से उत्तर द्विविध हुआ।

(२) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्ग मूल ± २ है।
(३) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल्य $+ २$ है।
(४) वह कौन सी संख्या है जिसका वर्गमूल $- २$ है।

बीजगणित की साधारण युक्ति से ऊपर के तीनों प्रश्नों के उत्तर में लोग एक ही साधारण संख्या ४ कहते हैं। परन्तु ध्यान देकर यदि सोचो तो तीनों के उत्तर में परस्पर भ्रम न पड़े इसके लिये तीनों के लिये कुछ सङ्केत कल्पना करना चाहिए

अर्थात् जिस ४ के मूल से धन २ और ऋण २, दोनों का ग्रहण करते हैं उस ४ से भिन्न होने के लिये ४ में एक ऐसा सङ्केत करना चाहिये जिससे यह बोध हो कि ऋण मूल २ के वर्ग के समान यह है। जिसमें मूल लेने में ऋण २ ही का ग्रहण किया जाय। इसी प्रकार ४ में एक दूसरा सङ्केत भी ऐसा होना चाहिए जिससे समझा जाय कि यह +२ का वर्ग है और इस का मूल +२ ही अपेक्षित है। और जिस ४ में ये दोनों सङ्केत मिले हों उससे समझना चाहिए कि साधारण ४ प्रसिद्ध है। इसी प्रकार बीजगणित से वा इस ग्रंथ से प्रसिद्ध है कि ४ का घनमूल त्रिविध होगा; इसलिये अलग अलग इन तीनों के घन को समझने के लिये ४ में तीन सङ्केत कल्पना करनी चाहिए और जिस ४ में तीनों सङ्केत एकट्ठे देखे जांय उसे समझना चाहिए कि साधारण ४ है। इस प्रकार किसी साधारण संख्या आ का न घात मूल न विध होते हैं। उन न ओं के न घात को अलग अलग समझने के लिये आ में अलग अलग न सङ्केत करना चाहिए और जिस आ में न ओं सङ्केत एकट्ठा पाए जांय उससे समझना चाहिए कि साधारण प्रसिद्ध संख्या आ है।

२४८। आ साधारण संख्या के न घात मूल का एक मान जो पाटीगणित से आता है उसे अलग अलग[१] के न घात मूलों से गुण देने से न गुणन फल आ के न विध न घात मूलों के मान होते हैं (८४ वां प्रक्रम देखो)।

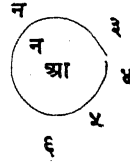
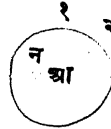
कल्पना करो कि डिमाइवर के सिद्धान्त से १ के न घात मूल का एक मान, $अ_१ =$ कोज्या $\frac{२\pi}{न} +$ ˡज्या $\frac{२\pi}{न}$ है (९३ वां प्रक्रम देखो) तो ९३ वें प्रक्रमसे सब मान $अ_१, अ_१^२, अ_१^३, \ldots\ldots अ_१^न$

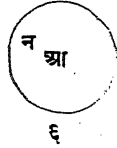
होंगे। इन्हें पाटीगणित से जो एक मान, आ के न घात मूल का आया है उससे गुण देने से क्रम से जो आ के न घात मूलों के मान आवेंगे उन्हें क्रम से पहिला, दूसरा, तीसरा, इत्यादि कहो। संख्या में इन्हें १, २, ३,......न संख्यक कहेंगे।

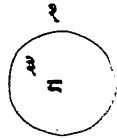
न १ २

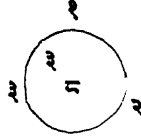
न आ ३

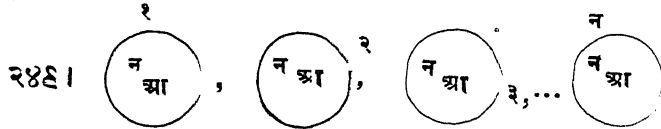
६ ५ ४

इस सङ्केत से समझो कि वह आ है जिसके सब न घात मूल अपेक्षित हैं जो कि ऊपर की युक्ति से साधारण आ संख्या है। वृत्तमध्यगत आ के शिर से बाईं ओर झुका उपरिगत, वृत्तान्तर्गत न से समझो कि यह आ अपने न घात मूलों के न घातों से बना है। परिधि पर तुल्यान्तरित १, २, ३, न, से समझो कि आ के सब न घात मूल लिए गए हैं।

इससे समझो कि वह आ है जिसका पहिला, और दूसरा न घातमूल छोड़ और सब न घातमूल अपेक्षित हैं।

इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला, और दूसरा न घातमूल अपेक्षित हैं।

इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल पहिला और छठवां न घातमूल अपेक्षित हैं।

इससे समझो कि यह वह आ है जिसका केवल छठवां न घातमूल अपेक्षित है।

इसी प्रकार संख्याओं के उत्थापन से

इससे समझना चाहिए चाहिए कि ८ का पहिला जो घनमूल है उसका घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल पहिला घनमूल अपेक्षित है।

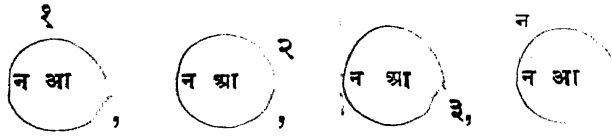
इससे समझना चाहिए कि ८ का दूसरा घनमूल जो होगा उसका यह घन है अर्थात् यह वह ८ है जिसका केवल दूसरा घनमूल अपेक्षित है।

इससे समझना चाहिए कि यह वह ८ है जिसका तीनों घनमूल अपेक्षित हैं, इसलिये इसे कहेंगे कि यह प्रसिद्ध संख्या ८ है।

२४६।

ये सब न घातमूल के बश साधारण आ संख्या के अङ्ग हैं। क्योंकि पहिले के ऊपर यथा क्रम दूसरे, तीसरे,......न संख्यक अङ्गों को ऐसे रख दें जिसमें सब आ और परिधि के भीतर का न एकट्ठा हो जाय तो (न आ) ऐसा हो जायगा जो कि साधारण आ संख्या के तुल्य है।

न के स्थान में १, २, ३,...के उत्थापन से कह सकते हो कि १ घातमूल के वश साधारण आ संख्या में १ अङ्क, २ घातमूल के वश २ अङ्क, ३ घातमूल के वश ३ अङ्क, ४ घातमूल के वश ४ अङ्क,...और न घातमूल के वश न अङ्क हैं। इसलिये

इस पर से कह सकते हैं कि न को अनन्त मानने से साधारण आ संख्या में अनन्त अङ्क बना सकते हैं।

साधारण आ संख्या को १ मान कहें तो २ घात के मूल के वश इसमें दो अङ्क होंगे इस लिये (^{२}आ) इसमें वा (^{२}आ) इसमें एक ही अङ्क अर्थात् साधारण आ संख्या का आधा अङ्क रहने से कहेंगे कि ये दोनों $\frac{१}{२}$ मान है।

इसी प्रकार न घात मूल के वश साशारण आ संख्या में न अङ्क रहने से उसको यदि १ मान कहें तो

इन सब में केवल एक एक अङ्क रहने से सब को अलग अलग कहेंगे कि $\frac{१}{न}$ मान हैं यदि न=∞ तो $\frac{१}{न}$=० और यदि न=म तो $\frac{१}{न}=\frac{१}{न}$ होगा क्योंकि +म में जब आ को १ मान माना है तो म के विपरीत −म में १ मान से विपरीत −१ मान होगा।

इसी प्रकार २ इसको कहेंगे कि $\frac{२}{न}$ मान है। २ इसे कहेंगे कि $\frac{न-१}{न}$ मान है। इसी प्रकार सर्वत्र समझना चाहिए।

२५०। कल्पना करो कि $० = फ(य) = अ_० य^{\frac{प}{म}} + अ_१ य^{\frac{प_१}{म_१}} + अ_२ य^{\frac{प_२}{म_२}} + \cdots + अ_{न-१} य^{\frac{प_{न-१}}{म_{न-१}}} + अ_न$ यह एक समीकरण है जिसमें य के घाताङ्क सब धनात्मक भिन्न संख्या हैं जिसमें सबसे बड़ा $\frac{प}{म}$ है। $म, म_१, \ldots म_{न-१}$ का लघुतमापवर्त्य ला समझो। ला में $म, म_न, \cdots म_{न-१}$ के भाग देने से लब्धि क्रम से $ल, ल_१, ल_२, \cdots ल_{न-१}$ समझो तो

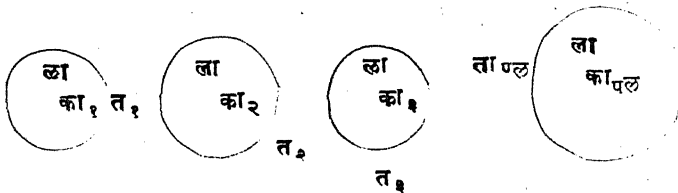
$$\text{फ}(\text{य})=\text{अ}_0\,\text{य}^{\frac{\text{प ल}}{\text{म ल}}}+\text{अ}_1\,\text{य}^{\frac{\text{प}_1\text{ल}_1}{\text{म}_1\text{ल}_1}}+\ldots$$

$$+\text{अ}_{\text{न}-1}\,\text{य}^{\frac{\text{प}_{\text{न}-1}}{\text{म}_{\text{न}-1}}\frac{\text{ल}_{-1\text{न}}}{\text{ल}_{\text{न}-1}}}+\text{अ}_\text{न}=0$$ इसमें यदि $\text{य}^{\frac{1}{\text{मल}}}=\text{य}^{\frac{1}{\text{ला}}}=\text{र}$ तो

$$\text{फ}(\text{य})=\text{फा}(\text{र})=\text{अ}_0\,\text{र}^{\text{प ल}}+\text{अ}_1\text{र}^{\text{प}_1\ \text{ल}_1}+\ldots$$

$$\text{अ}_{\text{न}-1}\,\text{र}^{\text{प}_{\text{न}-1}\text{ल}_{\text{न}-1}}=0$$

अब यह र के अकरणी गत अभिन्न फल के रूप में समीकरण हुआ। जिससे काशी के सिद्धान्त से र का मान प ल विध आवेंगे। मान लो कि वे र के मान क्रम से $\text{क}_1,\text{क}_2,\text{क}_3,\cdots \text{क}_{\text{ल}}$ हैं।

अब साधारण गणित की रीति से $\text{क}_1^{\text{मल}}=\text{क}_1^{\text{ला}}=\text{का}_1$ $\text{क}_2^{\text{ला}}=\text{का}_2, \text{क}_3^{\text{ला}}=\text{का}_3\ldots\ldots\text{क}_{\text{पल}}^{\text{ल}}=\text{का}_{\text{मल}}$ कहें और साधारण का_1, $\text{का}_2\ldots\ldots$ इत्यादि संख्याओं के ला घात मूलों के मानों में $\text{क}_1, \text{क}_2,\ldots$ को त_1 त_2, $\text{त}_3\ldots$ संख्या कहें तो ($\text{य}=\text{र}^{\text{ला}}=\text{र}^{\text{पल}}$, इसलिये २४६ प्रक्रम से

ये सब य के मान होंगे। $का_1$, $का_2$, $का_{पल}$ साधारण संख्याओं को एक एक मान कहो तो २४७ प्रक्रम से $\frac{1}{ला}=\frac{1}{मल}$ प्रत्येक मान होगा; इसलिये इनका योग$=\frac{पल}{मल}=\frac{प}{म}$इतने मान य के होंगे। इस पर से सिद्ध होता है कि समीकरण में अव्यक्त का सबसे बड़ा धन घात जो होता है वह चाहे अभिन्न वा भिन्न हो अव्यक्त के मानों की संख्या उसी के तुल्य होगी।

२५१। कल्पना करो कि $न_1$, $न_2$, $न_त$ ये उत्तरोत्तर अधिक धनात्मक भिन्न वा अभिन्न संख्या हैं तो बीजगणित से $-न_1, -न_2, -न_3 \ldots\ldots -न_त$ ये ऋण संख्या में उत्तरोत्तर अल्प होंगी जिनमें सबसे बड़ा$-न_1$ है।

मानो कि $फ(य)=अ_1 य^{-न_1}+अ_2 य^{-न_2}+अ_3 य^{-न_3}+\ldots+अ_त य^{-न_त}=0$ इसमें जानना है कि य के कितने मान हैं।

मान लो कि य के र विध मान हैं तो फ (य) को $य^{न_त}$ इस से गुण देने से जो $य^{न_त}फ(य)=0$ यह समीकरण नया होगा उसमें अब र+न इतने मान य के होंगे परन्तु

$$य^{न_त}फ(य)=अ_1 य^{न_त-न_1}+अ_2 य^{न_त-न_2}+\cdots+अ_त=0$$

जहाँ धनात्मक भिन्न वा अभिन्न य का सब से बड़ा घात $न_त-न_1$ यह होगा इसलिये २४८ प्रक्रम से इसमें $न_त-न_1$ इतने य के मान होंगे; इसलिये

$र + न_त = न_त - न_१ \therefore र = -न_१$

इसलिये $फ(य) = अ_१ य^{-न_१} + अ_२ य^{-न_२} + अ_३ य^{-न_३} + \cdots + अ_त य^{-न_त} = ०$ इसमें य के सब से बड़े घात की संख्या जो $-न_१$ है उतने य के मान होंगे यह सिद्ध हुआ। इसलिये अब साधारणतः यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि किसी समीकरण में अव्यक्त की सब से बड़ी जो घात संख्या होती है उतने ही विध उस समीकरण में अव्यक्त के मान आवेंगे चाहे वह घात संख्या अभिन्न वा भिन्न धनात्मक वा ऋणात्मक हो। जैसे

$$फ(य) = अ_० य^न + अ_१ य^{न-१} + अ_२ य^{न-२} + \ldots\ldots + अ_{न-१} य + अ_त = ०$$

इस समीकरण में जहां न अभिन्न और धन है यदि $य = \frac{१}{र}$ तो नया समीकरण $\frac{अ_०}{र^न} + \frac{अ_१}{र^{न-१}} + \frac{अ_२}{र^{न-२}} + \ldots\ldots + \frac{अ_{न-१}}{र} + अ_न$

$$= अ_० र^{-न} + अ_१ र^{-(न-१)} + अ_२ र^{-(न-२)} + \ldots\ldots + अ_{न-१} र^{-१} + अ_न र^० = ०$$

ऐसा हुआ, जहां बीजगणित की युक्ति से र का सब से बड़ा घात ० है। इसमें जितने र के मान आवेंगे उनकी संख्या ल कहें तो इस समीकरण को $र^न$ से गुण देने से जो दूसरा समीकरण बनेगा उसमें र के मान ल+न विध होंगे परन्तु समीकरण को $र^न$ से गुण देने से जो दूसरा समीकरण $अ_० + अ_१ र + अ_२ र^२ + \cdots + अ_न र^न = ०$

ऐसा बनेगा इसमें र के मान न विध आवेंगे इसलिये

$$ल + न = न \therefore ल = ०$$

इससे सिद्ध होता है कि किसी हरात्मक समीकरण में यदि छेद, समीकरण को $र^न$ से गुण कर न उडाए जायँ तो उसमें शून्य विध अव्यक्त का मान होगा। यह सब अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों को विशेष ध्यान देना उचित है। मेरा लिखना इस विषय पर कैसा है इसे भी ध्यान देकर विचारें।

२५१। यह दिखलाना है कि

$$\frac{आ^2}{य-अ}+\frac{का^2}{य-क}+\frac{खा^2}{य-ख}+\cdots+\frac{आ^2}{य-अ}-ट=0$$

इसमें य का मान कोई असंभव संख्या नहीं है।

सम्भव हो तो मानो कि $य=प+ब\sqrt{-1}$ तो दूसरा मान भी य का एक $प-ब\sqrt{-1}$ होगा। इन दोनों मानों का समीकरण में उत्थापन देने से जो समीकरण के दो मूल होंगे उनमें प्रथम में दूसरे को घटा देने से

$$ब\left\{\frac{आ^2}{(प-अ)^2+ब^2}+\frac{का^2}{(प-क)^2+ब^2}+\frac{खा^2}{(प-ख)^2+ब^2}+\cdots+\frac{ञ^2}{(प-ञ)^2+ब^2}\right\}=0$$

अब जब तक ब=० न मानोगे तब तक यह समीकरण असंभव होगा। क्योंकि कोष्टकान्तर्गत सब पद धन हैं। वे मिल कर शून्य नहीं हो सकते। इसलिये समीकरण की सत्यता में शून्य के समान ब का मान होने से सिद्ध हुआ कि इसमें अव्यक्त का कोई मान असम्भव संख्या नहीं है।

२५१। $य_1, य_2, य_3, \cdots\cdots य_न$ ये न अव्यक्त हैं। इनके वश से नीचे जो न समीकरण लिखे हैं उनसे इनका मूल जानना है

$$य_1 + य_2 + य_3 + \ldots\ldots + य_न = 0$$

$$अ_1 य_1 + अ_2 य_2 + अ_3 य_3 + \ldots\ldots + अ_न य_न = 0$$

$$अ_1^2 य_1 + अ_2^2 य_2 + अ_3^2 य_3 + \ldots\ldots + अ_न^2 य_न = 0$$

$$अ_1^3 य_1 + अ_2^3 य_2 + अ_3^3 य_3 + \ldots\ldots + अ_न^3 य_न = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$अ_1^{न-2} + अ_2^{न-2} य_2 + अ_3^{न-2} य_3 + \ldots\ldots + अ_न^{न-2} य_न = 0$$

$$अ_1^{न-1} य_1 + अ_2^{न-1} + अ_3^{न-1} य_3 + \ldots\ldots + अ_न^{न-1} य_न = क$$

इन समीकरणों को क्रम से $ख_{न-1}$, $ख_{न-2}$, $ख_{न-3}$,...... $ख_2$, $ख_1$, १ से गुणा कर जोड देने से और ऐसी कल्पना करने से कि $ख_{न-1}$, $ख_{न-2}$, इत्यादि जो कि अभी अविदित हैं ऐसे हैं कि इनके वश से जोड़ने में $य_2$, $य_3$,......$य_न$ इनके अलग अलग गुणक सब शून्य हो जाते हैं तो

$$य_1 \left(अ_1^{न-1} + ख_1 अ_1^{न-2} + ख_2 अ_1^{न-3} + \ldots\ldots + ख_{-2} अ_1 + ख_{न-1} \right) = 0$$

$ख_{न-1}$, $ख_{न-2}$......इत्यादि में ऐसा धर्म मानने से सिद्ध होता है कि

$$फ(ल) = ल^{न-1} + ख_1 ल^{न-2} + ख_2 ल^{न-3} + \ldots\ldots + ख_{न-2} ल + ख_{न-1} = 0$$

इस समीकरण के $अ_2$, $अ_3$,......$अ_न$ ये सब अव्यक्तमान हैं इसलिये $फ(ल) = (ल - अ_2)(ल - अ_3)\ldots\ldots(ल - अ_न)$ इसमें ल के स्थान में $अ_1$ का उत्थापन देने से $य_1$ का गुणक

$(अ_1 - अ_2)(अ_1 - अ_3)\ldots\ldots(अ_1 - अ_न)$ यह आवेगा; इसलिये

$$य_1 = \frac{क}{(अ_1 - अ_2)(अ_1 - अ_3)\cdots(अ_1 - अ_न)}$$

इसी प्रकार साजात्य धर्म रहने से $य_2$, $य_3$, इत्यादि के मान आ जायंगे।

२५२। य, र, ल इत्यादि न अव्यक्त हैं। उनके मान नीचे लिखे हुए न समीकरणों से निकालने हैं।

$$\frac{य}{ज_1 - अ} + \frac{र}{ज_1 - क} + \frac{ल}{ज_1 - ख} + \ldots\ldots = 1$$

$$\frac{य}{ज_2 - अ} + \frac{र}{ज_2 - क} + \frac{ल}{ज_2 - ख} + \ldots\ldots = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{य}{ज_न - अ} + \frac{र}{ज_न - क} + \frac{ल}{ज_न - ख} + \ldots\ldots = 1$$

समीकरणों के रूप से कह सकते हैं कि $ज_1$, $ज_2$, $ज_3$,...... $ज_न$ ये $\frac{य}{ज - अ} + \frac{र}{ज - क} + \frac{ल}{ज - ख} + \ldots\ldots = 1$ इस न घात समीकरण में ज के मान हैं। मान लो कि $ज = अ - ट$ तो इसके उत्थापन से और पक्षान्तरानयन से

$$1 + \frac{य}{ट} + \frac{र}{ट + क - अ} + \frac{ल}{ट + ख - अ} + \cdots\cdots = 0$$

छेदगम करने से इसका रूप

$ट^न + आ_1 ट^{न-1} + आ_2 ट^{न-2} + \ldots\ldots + आ_न = 0$ ऐसा होगा जहां $आ_न = य(क - अ)(ख - अ)$

परन्तु जब ञ=अ—ट ∴ ट=अ—ञ; इसलिये ट के मान सब $अ-ञ_१$, $अ-ञ_२$, $अ-ञ_३$,.........$अ-ञ_न$ ये होंगे इसलिये २५ वें प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से

$$आ_न = (अ-ञ_१)(अ-ञ_२)(अ-ञ_३)\ldots\ldots = ० \quad (-१)^न य(क-अ)(ख-अ)\ldots\ldots$$

$$\therefore य = \frac{(अ-ञ_१)(अ-ञ_२)(अ-ञ_३)\cdots}{(अ-क)(अ-ख)\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

इसी प्रकार ञ=क—ट, ञ=ख—ट, इत्यादि मानने से ल इत्यादि के मान आ जायंगे।

२५५। सिद्ध करना है कि ख, $ख^२$, $ख^३$,......$ख^न$ ये न संख्यायें हैं।

इनमें से म, म संख्यायें ले लेकर उनके गुणनफल निकालें तो सब गुणनफलों के योग को सिद्ध करना है कि

$$\frac{(ख^न-१)(ख^{न-१}-१)\ldots(ख^{न-म+१}-१)}{(ख-१)(ख^२-१)\ldots(ख^म-१)} ख^{\frac{म(म+१)}{२}}$$

मान लो कि

फ $(य) = (य+ख)(य+ख^२)\ldots(य+ख^न) = य^न + प_१य^{न-१} + \cdots + प_मय^{न-म} + \cdots + प_न, \cdots(१)$ तो $प_म$ का मान जानने के लिये २५ प्रक्रम के ५ वें प्रसिद्धार्थ से (१) य के स्थान में $\frac{य}{ख}$ का उत्थापन देने से और $ख^न$ से गुणन देने से

$(य+ख^{२})\ (य+ख^{३}) \ldots (य+ख^{न+१}) = य^{न} + प^{१}\ ख\ य^{न-१}$
$+ \cdots + प_{न-१} ख^{न-१} य + प_{न} ख^{न} \ldots (२)$

(१) और (२) से

$(य+ख^{न+१})\ (य^{न}+प_{१} य^{न-१} + \cdots + प_{न-१} य + य_{न})$
$= (य+ख)\ (य^{न}+प_{१} ख\ य^{न-१} + \cdots + प_{न-१} ख^{न-१} य$
$+ प_{न} ख^{न})$

दोनों पक्षों के $य^{न-म+१}$ के गुणकों को समान करने से

$$प_{म} + ख^{न+१} प_{म-१} = प_{म} ख^{म} + प_{म-१} ख^{म}$$

$$\therefore\ प_{म} = \frac{ख^{म}\ (ख^{न-म+१} - १)}{ख^{म} - १} प_{म-१} \ldots\ldots\ldots\ldots (३)$$

$$\text{और } प_{१} = ख + ख^{२} + \cdots + ख^{न} = \frac{ख\ (ख^{न} - १)}{ख - १}$$

(३) में म के स्थान में १, २, ३, इत्यादि के उत्थापन से $प_{म}$ का मान वही होगा जो कि ऊपर लिख आए हैं।

२५६। फ (य) = ० इसमें मान लो कि अव्यक्त का एक मान अ है तो फ (य) = (य − अ) फा (य)

$$\therefore\ \frac{फ(य)}{य} = \left(१ - \frac{अ}{य}\right) फा(य)$$

$$\text{और } ला \frac{फ\ (य)}{य} = -\left(\frac{अ}{य} + \frac{१}{२}\frac{अ^{२}}{य^{२}} + \cdots\right) + ला\ फा\ (य)$$

इसलिये यदि ला $\frac{फ\ (य)}{य}$ इसका मान य के ऋण और धन घात रूप पदों की श्रेढी में निकले तो $\frac{१}{य}$ का जो गुणक होगा

वह दूसरे पक्ष के $\frac{१}{य}$ के गुणक $-$ अ के समान अवश्य होगा यदि ला फा (य) के मान में य के सब धन ही घात हों तो।

इस पर से फ (य) $=$ ० इसका सब से छोटा मूल निकलेगा तैसे मान लो कि फ (य) $=$ ० में एक से एक बड़े य के अ, क, ख, ग इत्यादि मान हैं तो

$$फ\,(य) = अ_{०}\,(य - अ)\,(य - क)\,(य - ख)$$

$$\frac{फ\,(य)}{य} = अ_{०}\left(१ - \frac{अ}{य}\right)(य - ख)\,(य - ख)\ldots$$

$$= का\left(१ - \frac{अ}{य}\right)\left(१ - \frac{य}{क}\right)\left(१ - \frac{य}{ख}\right)\ldots$$

जहाँ $का = अ_{०} \times - क \times - ख \times - \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\text{तो } ला\,\frac{फ\,(य)}{य} = ला\,क + ला\left(१ - \frac{अ}{य}\right) + ला\left(१ - \frac{य}{क}\right)$$

$+ ला\left(१ - \frac{य}{ख}\right) + \ldots$ अब यदि य, अ और क के बीच में हो तो

$$ला\left(१ - \frac{अ}{य}\right),\ ला\left(१ - \frac{य}{क}\right),\ ला\left(१ - \frac{य}{ख}\right),$$

इनसे जो श्रेढी होगी उसमें ऐसे पद होंगे जिनमें बहुतों में य के ऋण घात और बहुतों में य के धन घात रहेंगे।

जैसे यदि फ (य) $= य^{न} + ख\,य - क = ०$

$$\text{तो } \frac{फ\,(य)}{य} = ख - \frac{क}{य} + य^{न-१} = ख\left(१ - \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख}\right)$$

इसलिये $ला \frac{फ(य)}{य} = ला\ ख + ला \left(१ - \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख}\right)$

$$= ला\ ख - ल - \tfrac{१}{२}ल^{२} - \tfrac{१}{३}ल^{३} \ldots$$

यदि $ल = \frac{क}{खय} + \frac{य^{न-१}}{ख} = \frac{क}{खय}\left(१ - \frac{य^{न}}{क}\right)$

अब जिन जिन $ल, ल^{न+१}, ल^{२न+१}$ इत्यादि पदों में $\frac{१}{य}$ के गुणक हैं उनको अलगाने से लघुतम अव्यक्त मान $= \frac{क}{ख} - \frac{क^{न}}{ख^{न+१}} + \frac{२\ न\ क^{२न-१}}{२.ख^{२न+१}}$

$$- \frac{३\ न\ (\ ३\ न - १\ )}{२\cdot ३} \frac{क^{३न-२}}{ख^{३न+१}} + \cdots\cdots$$

२५७। इसी प्रकार $फ\ (य) = ०$ इसमें $अ_{१}, अ_{२}, \ldots अ_{म}$ ये अव्यक्त मान एक से एक बड़े और अवशिष्ट मानों से अल्प हैं तो

$$फ\ (य) = (य - अ_{१})\ (य - अ_{२})\ (य - अ_{३}) \ldots\ldots (य - अ_{म}) \times फा\ (य)$$

इसलिये $\frac{फ\ (य)}{य^{म}} = \left(१ - \frac{अ_{१}}{य}\right)\left(१ - \frac{अ_{२}}{य}\right)\cdots\left(१ - \frac{अ}{य}\right) \times फा\ (य)$

यहां भी दोनों पदों का लघुरिकथ लेने से $ला \frac{फ(य)}{य^{न}}$ इसके $\frac{१}{य}$ के गुणक को कहेंगे कि $-(अ + अ_{२} + अ_{३} + \cdots + अ_{म})$ यही है।

यह ऊपर के दोनों सिद्धान्त मर्फी के समीकरण मीमांसा में लिखे हैं (See Murphy's Theory of Equations, pages 77-83)

२५८। यदि फा (य), न − १ घात का वा उससे अल्प घात का फल हो और फ (य) न घात का तो कल्पना करो कि

$$\frac{\text{फा}(\text{य})}{\text{फ}(\text{य})} = \frac{\text{आ}}{\text{य} - \text{अ}} + \frac{\text{का}}{\text{य} - \text{क}} + \frac{\text{खा}}{\text{य} - \text{ख}} + \cdots + \frac{\text{ञा}}{\text{य} - \text{ञ}}$$ ।

जहाँ फ (य) = ० इसके मूल अ, क, ख,……ञ, हैं जो कोई आपस में समान नहीं है।

दोनों पक्षों को फ (य) से गुण देने से

$$\text{फा}(\text{य}) = \text{आ}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य} - \text{अ}} + \text{का}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य} - \text{क}} + \text{खा}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य} - \text{ख}} + \cdots + \text{ञा}\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य} - \text{ञ}}$$

इसमें यदि य = अ तो दहिने पक्ष में प्रथम पद छोड़ और सब पद उड़ जायँगे और प्रथम पद ५२ वें प्रक्रम से

फा (अ) = आ फ′ (अ) ऐसा होगा; इसलिये $\text{आ} = \frac{\text{फा}(\text{अ})}{\text{फ}'(\text{अ})}$

इसी प्रकार $\text{का} = \frac{\text{फा}(\text{क})}{\text{फ}'(\text{क})}$, इत्यादि आ जायंगे।

यदि फा (य), न घात से बड़े घात का फल हो तो फ (य) के भाग से लब्धि फि (य) और शेष फी (य) जो न घात से

अल्प घात का होगा बनालो फिर ऊपर की युक्ति से $\frac{फी(य)}{फ(य)}$ का मान खण्ड भिन्नों में बना लो।

$$यदि\ फ(य) = प_0 (य - अ)^{त} (य - क)^{थ} (य - ख)^{द} \ldots (य - ज)$$

$$तो\ \frac{फा(य)}{फ(य)} = \frac{आ}{(य - अ)^{त}} + \frac{का}{(य - क)^{थ}} + \frac{खा}{(य - क)^{द}} + \cdots\cdots + \frac{जा}{य - ज}$$

ऐसा रूप बनाकर ऊपर की युक्ति से आ, का, खा,......के प्रमाण जान सकते हैं। इस विषय में और विशेष जानना हो तो चलनकलन और चलराशिकलन देखो। ऊपर के प्रकारों की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) सिद्ध करो कि

$$\frac{\lfloor न}{(य+१)(य+२)\cdots(य+न+१)} = \frac{१}{य+१} - \frac{न}{१}\frac{१}{य+२} + \frac{न(न-१)}{१\cdot२}\frac{१}{य+३} - \cdots + \frac{(-१)^{न}}{य+न+१}$$

मान लो कि बायां पक्ष $\frac{आ_१}{य+१} + \frac{आ_२}{य+२} + \frac{आ_३}{य+३} + \cdots + \frac{आ_{न+१}}{य+न+१}$

$$\lfloor न = आ_१(य+२)(य+३)\cdots + आ_२(य+१)(य+३) \cdots + आ_३(य+१)(य+२)(य+४)\ldots\ldots।$$

य के स्थान में क्रम से $-१, -२, -३, \ldots$ के उत्थापन से

$\lfloor \text{न} = \text{आ}_{१} \lfloor \text{न} \quad \therefore \text{आ}_{१} = १$

$\lfloor \text{न} = -\text{आ}_{२} \lfloor \text{न} - १ \quad \therefore \text{आ}_{२} = -\text{न}$

$\lfloor \text{न} = \text{आ}_{३} \lfloor २ \lfloor \text{न} - २ \quad \therefore \text{आ}_{३} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१ . २}$

इस पर से ऊपर की सरूपता उतपन्न हुई।

२। सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{\text{य}+१} - \frac{\text{न}}{(\text{य}+१)(\text{य}+२)} + \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{(\text{य}+१)(\text{य}+२)(\text{य}+३)} \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{\text{न}} \lfloor \text{न}}{(\text{य}+१) \cdots\cdots (\text{य}+\text{न}+१)} = \frac{१}{\text{य}+\text{न}+१} ।$$

मान लो कि बायां पक्ष $\frac{\text{आ}_{१}}{\text{य}+१} + \frac{\text{आ}_{२}}{\text{य}+२} + \frac{\text{आ}_{३}}{\text{य}+३}$

$$+ \cdots + \frac{\text{आ}_{\text{न}+१}}{\text{य}+\text{न}+१}$$

तो छेदगम करने से और य के स्थान में—१,—२, इत्यादि के उत्थापन से

$\text{अ}_{१} = (१-१)^{\text{न}} = ०, \text{अ}_{२} = \text{न}(१-\text{न})^{\text{न}-१} = ०$

$\text{अ}_{३} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)}{१.२}(१-१)^{\text{न}-२} = ०$

इस प्रकार से सब के मान शून्य होंगे केवल $\text{आ}_{\text{न}+१} = १$ ऐसा होगा; इसलिये ऊपर की सरूपता सिद्ध हुई।

इस प्रकार अनेक चमत्कृत सरूपता उत्पन्न होती हैं।

२५९ । य और र ऐसी दो राशि हैं कि

$य + र + क$=एक पूरा वर्ग, $य - र + क$=एक पूरा वर्ग,

$\frac{र(य+१)}{२}$=एक पूरा घन, $य^२ + र^२ + ख$=एक पूरा वर्ग,

$य^२ - र^२ + ग$ एक पूरा वर्ग,

और इन पांचों के मूलों का योग=निर्दिष्ट संख्या तो उन दोनों राशिओं के कैसे मान कल्पित किए जायं जिसमें ऊपर के पांच आलाप आप से आप घट केवल अन्त के आलाप के लिये समीकरण किया जाय।

भास्कराचार्य से भी पहिले भारतवर्षीय किसी प्राचीन गणितज्ञ का निकाला यह प्रश्न है क्योंकि भास्कराचार्य ने अपने बीजगणित में स्पष्ट लिखा है कि "कस्याप्युदाहरणम्" अर्थात् किसी का प्रश्न यह है। यहां क, ख और ग ये व्यक्त संख्या हैं।

यहां यदि $य + र + क = यो^२$ तो $य + र = यो^२ - क$

और यदि $य - र + क = वि^२$ तो $य - र = वि^२ - क$

इस पर से $य = \frac{यो^२ + वि^२ - २क}{२}$, $र = \frac{यो^२ - वि^२}{२}$

अब वर्गान्तर का आलाप मिलाने के लिये

$$य^२ = \frac{यो^४ + २ यो^२ वि^२ - ४ क यो^२ + वि^४ - ४ क वि^२ + ४ क^२}{४}$$

$$र^२ = \frac{यो^४ - २ यो^२ वि^२ + वि^४}{४}$$

और $य^२ - र^२ + ग =$

$$\frac{४ यो^२ वि^२ - ४ क यो^२ - ४ क वि^२ + ४ क^२ + ४ ग}{४}$$

$$= यो^२ वि^२ - क यो^२ - क वि^२ + क^२ + ग$$
$$= यो^२ वि^२ - २ यो वि क + क^२$$
$$- (क यो^२ - २ यो वि क + क वि^२) + ग$$
$$= (यो वि - क)^२ + ग - क(यो - वि)^२$$

इस लिये यदि $ग = क (यो - वि)^२$ तो

$य^२ - र^२ + ग =$ एक पूरा वर्ग $= (यो वि - क)^२$

परन्तु जब $ग = क (यो - वि)^२$ तब

$$(यो - वि)^२ = \frac{ग}{क} \quad \therefore यो - वि = \sqrt{\frac{ग}{क}} \text{ और } यो = वि \sqrt{\frac{ग}{क}}$$

अर्थात् वर्गान्तर के क्षेप में राशियों के योग वियोग क्षेप से भाग देकर वर्गमूल जो हो उसे कल्पित वियोग मूल में जोड़ देने से योग मूल का प्रमाण होता है। फिर इनके उत्थापन से यो और वि के फल रूप में य और र आ जायँगे जिन से फिर आगे क्रिया करनी चाहिए।

इस प्रकार से राशिकल्पना करने के लिये अपने बीजगणित में भास्कर ने यह सूत्र बनाया है।

सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य।
योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यद्वर्गान्तरक्षेपकतः पदं स्यात्॥
तेनाधिकं तत्तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ।
स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी॥

ऊपर जो इसकी उपपत्ति लिखी है वह कृष्णदैवज्ञ की बनाई है। (बीजगणित की टीका बीजाङ्कुरा देखो)

भास्कर के प्रकार में यदि $\frac{ग}{क} = \frac{०}{०}$ ऐसा हो अर्थात् जिस प्रश्न में क $= ० =$ ग ऐसा हो वहां पर लुप्तमान होने से यह पता न लगेगा कि $\sqrt{\frac{ग}{क}}$ इसका ठीक ठीक क्या मान है; इसलिये ऐसे स्थानों में भास्कर के प्रकार का व्यभिचार होगा। इसके लिये मेरी ऐसी कल्पना है।

कल्पना करो कि $प = \sqrt{\frac{ग}{क}}$ तो ऊपर लिखी हुई क्रिया से

$$यो = वि + प,\ \ य = \frac{यो^{२} + वि^{२} - २क}{२} = \frac{२वि^{२} + २विप + प^{२} - २क}{२}$$

$$र = \frac{यो^{२} - वि^{२}}{२} = \frac{२विप + प^{२}}{२}$$

$$य^{२} = \frac{४वि^{४} + ८वि^{३}प + ४वि^{२}प^{२} - ८कवि^{२} + ४वि^{२}प^{२}}{४}$$
$$+ \frac{४विप^{३} - ८कपवि + प^{४} - ४कप^{२} + ४क^{२}}{४}$$

$$र^{२} = \frac{४वि^{२}प^{२} + ४विप^{३} + प^{४}}{४}$$

$$और\ य^{२} + र^{२} + ख = \frac{४वि^{४} + ८प^{४}वि^{३} + १२प^{२}वि^{२} - ८कवि^{२}}{४}$$
$$+ \frac{८प^{३}वि - ८कपवि + २प^{४} - ४कप^{२} + ४क^{२} + ४ख}{४}$$

$$= \text{वि}^{४} + २\,\text{प}\,\text{वि}^{३} + ३\,\text{प}^{२}\,\text{वि}^{२} + २\,\text{प}^{३}\,\text{वि} + \frac{\text{प}^{४}}{२}$$

$$— २\,\text{क}\,\text{वि}^{२} - २\,\text{क}\,\text{प}\,\text{त्रि} - \text{क}\,\text{प}^{२} + \text{क}^{२} + \text{ख}$$

$$= (\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{वि})^{२} + २\,\text{वि}^{२}(\text{प}^{२} - \text{क}) + \text{वि}(२\,\text{प}^{३} - २\text{क}\,\text{प}) + \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} + \text{ख}$$

$$= (\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{त्रि})^{२} + २\,\text{वि}^{२}(\text{प}^{२} - \text{क}) + २\,\text{प}\,\text{त्रि}\,(\text{प}^{२} - \text{क}) + \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} + \text{ख}$$

$$= (\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{वि})^{२} + २\,(\text{प}^{२} - \text{क})\,(\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{वि}) + \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} + \text{ख}$$

$$= (\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{त्रि})^{२} + २\,(\text{प}^{२} - \text{क})\,(\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{वि}) + (\text{प}^{२} - \text{क})^{२} - (\text{प}^{२} - \text{क})^{२} + \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} + \text{ख}$$

$$= \{(\text{वि}^{२} + \text{प}\,\text{वि}) + (\text{प}^{२} - \text{क})\}^{२} — (\text{प}^{२} - \text{क})^{२} + \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} + \text{ख}$$

बड़े कोष्ठ के बाहर के सब पद मिल कर यदि शून्य हो जायँ तो यह पूरा वर्ग हो जायगा इस लिये

$$० = \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} - (\text{प}^{२} - \text{क})^{२} + \text{ख} = \frac{\text{प}^{४}}{२} + \text{क}^{२} - \text{ग} - \text{प}^{४} + २\,\text{क}\,\text{प}^{२} - \text{क}^{२} + \text{ख}$$

$$= २ क प^{२} - \frac{प^{४}}{२} - ग + ख = २ ग - \frac{प^{४}}{२} - ग + ख = ग + ख - \frac{प^{४}}{२}$$

$$\therefore \frac{प^{४}}{२} = ग + ख \text{ और } प = \left\{ २(ग + ख) \right\}^{\frac{१}{४}}$$

इस पर से सिद्ध होता है कि वर्गान्तर और वर्गयोग क्षेपों के दूने योग के मूल का मूल जो हो वही $\sqrt{\frac{ग}{क}}$ इसका मान होता है। अब चाहे ग, और क शून्य हों वा संख्यात्मक हों मेरे प्रकार का कहीं भी व्यभिचार न होगा।

इसपर मेरा बनाया यह सूत्र है।

वर्गान्तरक्षेपकसंमितिर्युता क्षेपेण कृत्योर्युतिजेन वै ततः।
द्विघ्नात् पदं तत्पदयुग्वियोगजं मूलं युतेर्मूलमतस्तयोर्मिती ॥
अब पाँचवां आलाप मिलाने के लिये यदि

$$\sqrt{य - र + क} = वि \quad \text{तो}$$

$$\sqrt{य + र + क} = यो = वि + प$$

$$\sqrt{य^{२} - र^{२} + ख} = यो\, वि - क = वि^{२} + प\, वि - क$$

$$\sqrt{य^{२} + र^{२} + ख} = वि^{२} + प\, वि - क + प^{२}$$

$$\left\{ \frac{र\,(य + १)}{२} \right\}^{\frac{१}{३}} = वि + \frac{१}{२}\left(ख + ग^{\frac{१}{२}} \right)$$

$$\text{क्योंकि} \quad य + १ = \frac{२\, वि^{२} + २\, वि\, प + प^{२} - २\, क + २}{२}$$

$$र = \frac{२ वि प + प^३}{२}$$

$$४ प त्रि^३ + ४ प^२ त्रि^२ + २ प^३ वि - ४ क प वि + ४ प वि$$
$$२ प^२ वि^२ + २ प^३ वि + प^४ - २ प^२ क + २ प^२$$

$$प \{ ४ वि^३ + ६ प वि^२ + (४ प^२ - ४ क + ४) वि \} + प^४ - २ प^२ क + २ प^२$$

$$= प \{ ४ वि^३ + ६ प वि^२ + (४ प^२ - ४ क + ४) वि \} + २ ग + २ ख - २ ग + २ प^२$$

इसलिये

$$\frac{र (य + १)}{२}$$

$$= प \frac{\{४वि^३ + ६पवि^२ + (४प^२ - ४क + ४) वि\} + २ ख + २ प^२}{८}$$

अब यदि यह पूरा घन होगा तो

$३ (४प)^{\frac{२}{३}}$ इससे $६ प^२$ यह अवश्य निःशेष होगा और लब्धि का घन $= २ ख + २ प^२$ ऐसा होगा। कल्पना करो कि लब्धि=ल तो $३ ल (४प)^{\frac{२}{३}} = ६ प^२ \therefore ल^३ (४प)^२ = ८प^६$ अर्थात् $१६ प^२ ल^३ = ८प^६ \therefore ल^३ = \frac{प^४}{२}$। परन्तु पहिले सिद्ध कर आए हैं कि $\frac{प^४}{२} = ख + ग$, इसलिये

$ल^{३} = \frac{प^{४}}{२} = ख + ग = २ख + २प^{२}$ $\therefore \frac{ग-ख}{२} = प^{२}$; इसलिये यदि $\frac{ग-ख}{२} = प^{२} = \frac{ग}{क}$ तो पांचो आलाप भास्कर की युक्ति से मिल सकते हैं।

जब $\frac{ग-ख}{२} = \frac{ग}{क}$ तो छेदगम से

$क\,ग - क\,ख = २\,ग$, वा $क\,(ग-ख) = २\,ग$

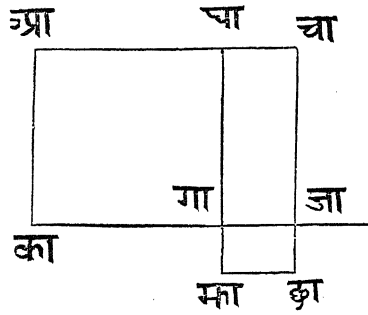
इस पर से यह सिद्ध होता है कि यदि वर्गान्तर क्षेप में वर्गयोग क्षेप को घटाने से जो शेष बचे उससे योगान्तर क्षेप को गुण दें, गुणनफल दूने वर्गान्तर क्षेप के तुल्य हो तो भास्कर की क्रिया से कहेंगे कि प्रश्न ठीक है, उत्तर निकल सकता है।

इसी प्रकार पांचवा आलाप ऐसा हो कि $\frac{यर}{२} + र$ यह एक पूरा घन है तो यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से सब बातों का परामर्श कर सकते हो।

(प्रश्न के उत्तर के लिये भास्कर का बीजगणित देखो।)

२६०। $य\,र = अ\,य + क\,र + ख$ इसमें चाहते हैं कि य और र के अभिन्न धनात्मक मान निकालें।

इसके लिये भास्कर चार्य ने ऐसी कल्पना की है कि मान लो कि जिस आयत का एक भुज य और दूसरा र है उसका क्षेत्रफल $य\,र$ है जो कि $अ\,य + क\,र + ख$ के समान है।

र भुज के समानान्तर भुज आ घा में यदि एक खण्ड आ च=अ का र लें तो य, अ भुजों से नये आयत च का का क्षेत्रफल=अ य होगा। और य भुज के समानान्तर घा मा में घा झा=क काट लें तो च झा का क्षेत्रफल=क (र−अ)=क र −अ क, इन दोनों को समग्र क्षेत्रफल य र में घटा देने से छा मा आयत का फल=य र—अ य−क र+अ क=अ य+क र+ख −अ य−क र+अ क=अ क+ख, इसलिए छा जा=झा मा का कोई अभिन्न मान मान उसका भाग अ क+ख व्यक्त संख्या में देनेसे छा झा=जा मा का मान होगा। इन दोनों में क्रम से छा च=क और का जा=अ जोड़ देने से य और र के मान अभिन्न आ जायँगे।

यदि अ और क ऋण होंगे तो छा जा − छा चा = छा जा − क = य, छा भा − अ = र होंगे जहां भ = अ, का = क, यदि अ > र और क > य से तो

क − छा जा = य

अ − छा भा = र

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि

य र = अ य + क र + ख इस समीकरण में दोनों अव्यक्तों के गुणन फल में व्यक्ताङ्क ख जोड़ कर इसमें ऐसे एक इष्ट = इ का भाग दो जिसमें लब्धि = ल अभिन्न हों। फिर इ + अ = र वा इ − अ = र और ल + क = य वा ल − क = य।

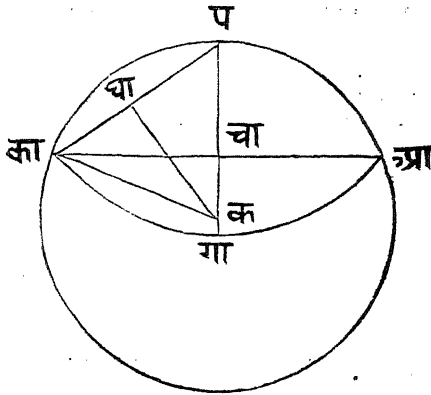
जैसे यदि य र = ४ य + ३ र + २ तो यहां ४ = अ, ३ = क और ख = २ इस लिये अ क + ख = ४ × ३ + २ = १४। इसमें इष्ट = इ = २ का भाग देने से ल = ७। इन पर से य = ल + क = ७ + ३ = १० और र = इ + अ = २ + ४ = ६।

इष्ट के वश अनेक उत्तर होंगे।

इस पर भास्कर ने यह सूत्र बनाया है :—

भावितं पक्षतोऽभीष्टात् त्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ ।
अन्यतो भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च ॥
वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्तेष्टेनेष्टतत्फले ।
एताभ्यां संयुतावूनौ कर्त्तव्यौ स्वेच्छया च तौ ॥
वर्णाङ्कौ वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात् ।

२६१ । निर्दिष्ट वृत्त के परिधि पर प एक विन्दु है उसको केन्द्र मान एक ऐसा वृत्त बनाना है जिससे निर्दिष्ट वृत्त का दो समान भाग हो जाय ।

कल्पना करो कि निर्दिष्ट वृत्त आप का है जिसका केन्द्र क और व्यासार्द्ध क प=अ । और मान लो कि प केन्द्र से प का

$=$ अ$_1$ व्यासार्द्ध से ऐसा का गा आ वृत्त बना जिससे दिए हुए वृत्त का समान दो भाग हो गया। का क प कोण का चापीय मान ष मान लो तो

का प आ चाप $=$ २ अ ष $=$ ध, का आ पूर्ण ज्या $=$ २ अ ज्याष $=$ जी प चा $=$ श, चा गा $=$ श$_1$, का गा आ चाप $=$ ध$_1$, का प आ चाप क्षेत्र का फल

$$= \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{श जी}}{2}$$

का गा आ चाप क्षेत्र का फल $= \dfrac{\text{अ}_1 (\text{ध}_1 - \text{जी}) + \text{श}_1\text{जी}}{2}$

दोनों चाप क्षेत्रों का फल $=$ आधा दिया हुआ वृत्त फल

$$= \frac{\pi \text{ अ}^2}{2}$$

$$= \frac{\text{अ}(\text{ध} - \text{जी}) + \text{श जी} + \text{श}_1 \text{ जी} + \text{अ}_1 (\text{ध}_1 - \text{जी})}{2}$$

$$= \frac{\text{अ} (\text{ध} - \text{जी}) + \text{अ}_1 \text{ जी} + \text{अ}_1 (\text{ध}_1 - \text{जी})}{2}$$

$$= \frac{\text{अ} (\text{ध} - \text{जी}) + \text{अ}_1 \text{ ध}_1}{2}$$

$$= \frac{\text{अ} (2 \text{ अ ष} - 2 \text{ अज्याष}) + 2 \text{ अ ज्या} \tfrac{1}{2}\text{ष ध}_1}{2}$$

$= \text{अ} (\text{ अ ष} - \text{अ ज्याष}) + \text{अ ज्याष} \tfrac{1}{2} \text{ ष } 2 \text{ अज्या } \tfrac{1}{2} \text{ ष } (\pi - \text{ष})$

$= \text{अ}^2 \{\text{ष} - \text{ज्याष} + 2 \text{ ज्या}^2 \tfrac{1}{2} \text{ ष} (\pi - \text{ष})\}$

$=अ^2\{ष - ज्याष + (१ - कोज्याष)\ (\pi - ष)\}$

$=अ^2(ष - ज्याष + \pi - \pi\ कोज्याष - ष + ष\ कोज्याष)$

$=अ^2(\pi + ष\ कोज्याष - \pi\ कोज्याष - ज्याष)$

$=अ^2\{\pi - कोज्याष\ (\pi - ष) - ज्याष\}$

अ² से दोनों पक्षों में भाग देने से और $\frac{\pi}{२}$ को घटा देने से

$$\frac{\pi}{२} - \{कोज्याष(\pi - ष) + ज्याष\} = फ(ष) = ०$$

१० वें प्रक्रम से ज्याष $(\pi - ष) +$ कोज्याष $-$ कोज्याष $=$ ज्याष$(\pi - ष) = फ'(ष)$ पहिले स्थूल मान मान लो कि $ष_१ = \frac{\pi}{२}$ तो

$$फ(ष_१) = \frac{\pi}{२} - १ = १\text{·}५७०७९६३२६८ - १ = \text{·}५७०७९६३२६८$$

$$फ'(ष_१) = \pi - \frac{\pi}{२} = \frac{\pi}{२} = १\text{·}५७०७९६३२६८$$

१४४ प्रक्रमस्थ न्यूटन की रीति से

$$\frac{फ(ष_१)}{फ'(ष_१)} = \frac{\frac{\pi}{२} - १}{\frac{\pi}{२}} = १ - \frac{२}{\pi} = च = \text{·}३६३२४६५$$

$$\frac{\pi}{२} - च = ष_२ = १\text{·}२०७५४९८ = ६९^\circ, ११', १५''$$

कोज्याष$_{२}$ = ·३५५३१०९

π − ष$_{२}$ = १·९३४०५२९

५८०२१३०
९६७०२१
९६७०२
८०२
१९३
१७

कोज्याष$_{२}$(π·ष$_{२}$) = ·६८७१८६५
ज्याष$_{२}$ = ·९३४७४८१

यों = १·६२१९३४६
$\frac{\pi}{२}$ = १·५७०७९६३

फ(ष$_{२}$) = −०·०५११३८३

ज्याष$_{२}$ = ·९३४७४८१
= १·९३४०४८९०

१७४०६२८६१
५८०२१२८
७७३६१७
१३५३८३
७७३६
१५४७
१९

फ′(ष$_{२}$) = १·८०८८४२९१

$\frac{\text{फ}(\text{ष}_{२})}{\text{फ}'(\text{ष}_{२})}$ = −०·०२४२४७० = च

ष$_{२}$ − च = ष$_{३}$ = १·२३५८३६८ = ७०°, ४८′, २९″, ३९‴

कोज्याष$_{३}$ = ·३२८७३०९
π − ष$_{३}$ = १·९०५७५५९
९०३७८२३

५७ ७·६७७
३८११५१२
१५२४६०४
१३३४०३
५७१७
१७१

कोज्याष$_{३}$(π − ष$_{३}$) = ·६२६४८०८४

ज्याष$_{३}$ = ·९४४५२३६
= १·९०५७५५९
६३२४४४९

१७१५१८०३१
७६२३०२४
७६२३०२
७६२३०
३८१२
५७२
११४

१·७९९८४०८५ = फ′(ष$_{३}$)

ज्या ष$_3$ = ·९४४४२३६ $\quad$ $\frac{\text{फ}(\text{ष}_3)}{\text{फ}'(\text{ष}_3)}$ = −०·००००६०१ = च

यो = १·५७०९०४४४

$\frac{\pi}{2}$ = १·५७०७९६३

फ(ष$_3$) = −०·०००१०८१४

ष$_3$ − च = ष$_4$ = १·२३५८९६९ = ७०°, ४८′, ४२″, २‴,

कोज्याष$_4$ = ·३२८६७४२ $\qquad$ ज्याष$_4$ = ·९४४४४३४

π − ष$_4$ = १·९०५६९५८

३४७६८२१

५७१७०८७४

३८११३६१

१५२५५५६

११४३४१

१३३३६

७६२

३८

कोज्याष$_4$(π − ष$_4$) = ·६२६३५३०२

ज्या ष$_4$ = ·९४४४४३४

यो = १·५७०७९६४२

$\frac{\pi}{2}$ = १·५७०७९६३

फ(ष$_4$) = −०·००००००१ = ० स्वल्पान्तर से

इस पर से

अ$_1$ = २अज्या $\frac{\text{ष}}{2}$ = २अ ज्या(३५, २४′, २१″, १‴)

= २अ × ·५७९३६४२५

$$=\frac{२अ \times ५७६३६४२५}{१००००००००}=\frac{२अ \times ११५८७२८५}{२०००००००}=\frac{२अ \times २३१७४५२}{४००००००}$$

$$=\frac{२३१७४५७अ}{२००००००}$$

यही मान टेलर के सिद्धान्त से भी आवेगा। चलनकलन का २५ प्र० देखो।

इसके लिये यह मेरा सूत्र है :—

नगशरवेदनगक्ष्मारामकरैराहता त्रिभज्यास्वा।
प्रयुतद्वयेन भक्ता व्यासदलं स्यात् स्ववृत्तस्य ॥

२६२। ऊपर के प्रश्न में यदि प विन्दु के का गा आ चाप से दिए हुए का प आ वृत्त का न भाग हो तो ऊपर ही की क्रिया से

$$\frac{\pi(न-१)}{न}-\left\{कोज्याष\ (\pi-ष)+ज्याष\right\}=फ\ (ष=०$$

ऐसा समीकरण होगा। इसमें पहिला ष का स्थूल मान $\frac{\pi}{न}$ इतना मान कर तब न्यूटन की रीति से असकृत् कर्म करना चाहिए।

यहां यदि त्रिकोणमिति से

$$कोज्याष=१-\frac{ष^२}{२!}+\frac{ष^४}{४!}-\frac{ष^६}{६!}+\ldots\ldots\quad तो$$

$$कोज्याष\ (\pi-ष)=\pi-\frac{\pi ष^२}{२!}+\frac{\pi ष^४}{४!}-\frac{\pi ष^६}{६!}+\ldots\ldots$$

$$-\text{ष}+\frac{\text{ष}^{३}}{२!}-\frac{\text{ष}^{५}}{४!}+\frac{\text{ष}^{७}}{६!}-\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{ज्याष}=\text{ष}-\frac{\text{ष}^{३}}{३!}+\frac{\text{ष}^{५}}{५!}-\frac{\text{ष}^{७}}{७!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{कोज्याष}\ (\pi-\text{ष})+\text{ज्याष}=\pi-\frac{\pi\text{ष}^{२}}{२!}+\frac{\pi\text{ष}^{४}}{४!}-\frac{\pi\text{ष}^{६}}{६!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\text{ष}^{३}}{३}-\frac{\text{ष}^{५}}{५\cdot३!}+\frac{\text{य}^{७}}{७\cdot!३}-\frac{\text{य}^{९}}{९\cdot३!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\pi-\frac{\pi\text{ष}^{२}}{२!}+\frac{\text{ष}^{३}}{३!}+\frac{\pi\text{ष}^{४}}{४!}-\frac{\text{ष}^{५}}{५\cdot३!}-\frac{\pi\text{ष}^{६}}{६!}+\frac{\text{य}^{७}}{७\cdot५!}$$

$$+\frac{\pi\text{ष}^{८}}{८!}-\frac{\text{य}^{९}}{९\cdot७!}+\cdots\cdots\cdots$$

इस पर से

$$\frac{(\text{न}-१)\pi}{\text{न}}\left\{\text{कोज्याष}\ (\pi-\text{ष})+\text{ज्याष}\right\}=\text{फ}(\text{ष})=०$$

$$=-\frac{\pi}{\text{न}}+\frac{\pi\text{ष}^{२}}{२!}-\frac{\text{ष}^{३}}{३}-\frac{\pi\text{ष}^{४}}{४!}+\frac{\text{ष}^{५}}{५\cdot३!}+\frac{\pi\text{ष}^{६}}{६!}-\frac{\text{य}^{७}}{७\cdot५!}$$

$$-\frac{\pi\text{ष}^{८}}{८!}+\frac{\text{य}^{९}}{९\cdot७!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\pi\left(-\frac{१}{\text{न}}+\frac{\text{ष}^{२}}{२!}-\frac{\text{ष}^{४}}{४!}+\frac{\text{ष}^{६}}{६!}-\frac{\text{ष}^{८}}{८!}+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{\text{ष}^{३}}{३}-\frac{\text{ष}^{५}}{५\cdot३!}+\frac{\text{य}^{७}}{७\cdot५!}-\frac{\text{य}^{९}}{९\cdot७!}+\cdots\cdots\right)$$

ऐसा समीकरण को फैला सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। २२१ प्रक्रम की परिभाषा से सिद्ध करो कि स (यर' − य'र) इसके सब अचलस्पर्द्धी स के चलस्पर्द्धी होंगे यदि चल अर्थात् अव्यक्त संख्या $\frac{य'}{र'}$ मानी जाय।

२। यदि $आ_१, आ_२, आ_३ \cdots\cdots आ_न$ एक ही तद्रूप और ध्रुवशक्तिक फल सम्बन्धी $\frac{फ(य)}{य-इ_१}, \frac{फ(य)}{य-इ_२}, \frac{फ(य)}{य-इ_३}, \cdots\cdots \frac{फ(य)}{य-इ_न}$ इनके अचलस्पर्द्धी हों जहां सोपान सो है और $इ_१, इ_२, इ_३, \cdots\cdots इ_न$

फ (य) = ० इसके मूल हैं तो सिद्ध करो कि

$\sum_{त=१}^{त=न} आ_त(य-इ_त)^{सो}$ यह फ (य) = ० इसका चलस्पर्द्धी होगा। सङ्केत के किये १६७ प्रक्रम का (२) उदाहरण देखो।

३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें $१+४\sqrt{-१}$, $४-\sqrt{-१}$ ये अव्यक्त के मान हों और समीकरण अकरणीगत संभाव्य गुणक का हो।

उ० $य^४ - १२य^३ + ७२य^२ - ११२य + ६७\cdot६ = ०$

४। $य^४ + २य^३ - ५य^२ + ६य + २ = ०$ इसमें अव्यक्त के मान बताओ। इतना जानते हैं कि एक मान $-२+\sqrt{३}$ है।

५। $य^४ + २पय^३ + ३प^२य^२ + २प^३य - प_१^४ = ०$ इसमें य के मान बताओ। उ० समीकरण का रूपान्तर $(य^२ + पय + प^२)^२ - प^४ - प_१^४ = ०$ ऐसा कर लो।

६। $य^३ + प_१य^२ + प_२य + प_३ = ०$ इसमें यदि य मान $अ_१$, $अ_२$ और $अ_३$ हों तो $(अ_२ + अ_३ - अ_१)^३ + (इ_३ + इ_१ - इ_२)^३ + (इ_१ + इ_२ - इ_३)^३$ इसका मान बताओ।

उ० $२०प_३ - प_१^३$

७। $य^३ - \frac{५}{२} य^२ - \frac{७}{१८} य + \frac{१}{१०८} = ०$ इसको ऐसा बदलो जिसमें भिन्न न रहे। मान लो कि $मय = र \therefore य = \frac{र}{म}$ इसके उत्थापन से

$$\frac{र^३}{म^३} - \frac{५}{२}\frac{र^२}{म^२} - \frac{५}{३^२२}\frac{र}{म} + \frac{१}{३^३२^२} = ०$$

$म^३$ से गुण देने से

$$र^३ - \frac{५}{२} म र^२ - \frac{७}{३^२२} म^२र + \frac{म^३}{३^३२^२} = ०$$

इससे स्पष्ट है कि यदि म=६ तो अभिन्न समीकरण

$र^३ - १५र^२ - १४र + २ = ०$ ऐसा होगा।

८। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $य^४ - ३य^३ + ७य^२ + ५य - २ = ०$ इसके अव्यक्त मान के हरात्मक मान के तुल्य हों।

उ० $२र^४ - ५र^३ - ७र^२ + ३र - १ = ०$

९। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$य^४ - ५य^३ + ७य^२ - १७य + ११ = ०$ इसके अव्यक्त मान से संख्या में ४ अल्प हों।

उ. $र^४ + ११र^३ + ४३र^२ + ५५र - ९ = ०$

१०। $य^४ - ४य^३ - १८य^२ - ३य + २ = ०$ इस पर से एक समीकरण ऐसा बनाओ जिसमें तीसरा पद उड जाय।

$य = र - ३$, और $य = र + १$ ऐसा मानने से तीसरा पद उड जायगा।

११। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$य^३ - य^२ + ८य - ६ = ०$ इसके अव्यक्तमान के वर्ग के समान हों।

उ. $र^३ + १५र^२ + ५२र - ३६ = ०$

१२। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$य^न + प_१ य^{न-१} + प_२ य^{न-२} + \ldots\ldots + प_{न-१} य + प_न = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के तुल्य हों।

ऊपर के समीकरण को

$(प_न + प_{न-३} य^३ + प_{न-६} य^६ + \cdots) + य (प_{न-१} + प_{न-४} य^३ + \cdots) + य^२ (प_{न-२} + प_{न-५} य^३ + प_{न-८} य^६ + \cdots)$

$= पा + बा\, य + ता\, य^२$, जहां पा, बा और ता $य^३$ के फल हैं। अब समीकरण में अव्यक्त के मान यदि $अ_१, अ_२, \ldots\ldots अ_न$ हों तो

$$पा + बा\, य + ता\, य^२ = (य - अ_१)(य - अ_२) \ldots\ldots (य - अ_न), \ldots\ldots(१)$$

य के स्थान में घा य, घा^{२} य के उत्थापन देने से जहां घा, घा^{२} एक के घन मूल हैं

$$पा + घा\ बा\ य + घा^{२}\ ता\ य^{२} \equiv (घा\ य - अ_{१})\ (घा\ य - अ_{२}) \ldots (घा य - अ_{न}), \ldots (२)$$

$$पा + घा^{२} बा\ य + घा\ ता\ य^{२} \equiv (घा^{२} य - अ_{१})\ (घा^{२} य - अ_{२}) \ldots (घा^{२} य - अ_{न}) \ldots (३)$$

(१), (२) और (३) को परस्पर गुण देने से और $१ + घा + घा^{२} = ०$ करने से

$पा^{३} + बा^{३} य^{३} + ता^{३} य^{६} - ३\ पा\ बा\ ता\ य^{३} \equiv (य^{३} - अ_{१}^{३})$ $(य^{३} - अ_{२}^{३}) \ldots (य^{३} - अ_{न}^{३})$ इसमें यदि $य^{३} = र$ तो

$$पा^{३} + बा^{३} र + ता^{३} र^{२} - ३\ पा\ बा\ ता\ र^{३} \equiv (र - अ_{१}) (र - अ_{२}^{३}) \ldots\ldots (र - अ_{न}^{३})$$

अब पा^{३}, बा^{३} और पा बा ता के मान में भी य^{३} के स्थान में र के उत्थापन से अभीष्ट समीकरण बन जायगा।

१३। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्तमान

$य^{४} - य^{३} + २य^{२} + ३\ य + १ = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के समान हों। उ. $र^{४} + १४\ र^{३} + ५०र^{२} + ६\ र + १ = ०$

१४। एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$अ\ य^{३} + क\ य^{२} + ख\ य + ग = ०$ इसके अव्यक्त मान के घन के समान हों।

$$उ.\ अ^{३} र^{३} + ३\ (अ^{२} ग + ९\ क^{३} - ९\ अ\ क\ ख)\ र^{२} + ३(अ\ ग^{२} + ९ख^{३} - ९\ क\ ख\ ग)\ र + ग^{३} = ०$$

१५ । एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान $य^३ + ६य^२ + ९य + ४ = ०$ इसके दो दो अव्यक्तमानों के अन्तरों के वर्ग के समान हों ।

$$उ. \; य^३ - १८य^२ + ८१य = ०$$

१६ । यदि $अय^३ + ३\,अ_१य^२ + ३अ_२य + अ_३ = ०$ इसके अव्यक्त मान $इ_१, इ_२$ और $इ_३$ हों तो एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसके अव्यक्त मान

$$(इ_१ - इ_२)\,(इ_१ - इ_३),\; (इ_२ - इ_३)\,(इ_२ - इ_१),\; (इ_३ - इ_१)\,(इ_३ - इ_२)$$

ये हों । $उ०\; र^३ + \frac{९\,हा}{अ_०^२} र^२ - \frac{२७\,(गा^२ + ४\,हा^३)}{अ_०^४} = ०$

हा और गा के लिये २२३ प्रक्रम का १ उदाहरण देखो ।

१७ । $य^४ + म\,प\,य^३ + म^२प_१य^२ + म^३\,प\,य + म^४ = ०$ इसमें अव्यक्त के मानों को बताओ । उ० $म^२य^२$ इससे भाग दे देने से

$$\left(\frac{य^२}{म_२} + \frac{म^२}{य^२}\right) + प\left(\frac{य}{म} + \frac{म}{य}\right) + प_१ = ०$$ ऐसा एक हरात्मक समीकरण बन जायगा ।

१८ । यदि $२\,य^२ + य - ६ =$ फ (य) तो बताओ फ (य) कब महत्तम वा न्यूनतम होगा ।

उ. जब $य = -\frac{४९}{८}$ तब फ (य) न्यूनतम ।

१९ । यदि फ (य) $= ३य^४ - १६\,य^३ + ६\,य_२ - ४८\,य + ७$ तो कब इस फल का मान महत्तम वा न्यूननम होगा ।

उ. $य = ४$ तो फ (य) न्यूनतम ।

२० । $य^{५} + २० य^{४} + ३० य^{३} + १५ य^{२} - ७य + ६ = ०$ इसमें धन मान की प्रधान सीमा क्या होगी । उ. $२^{\frac{१}{३}}$

२१ । $य^{५} + य^{४} - ४ य^{३} - ३य^{२} + ३ य + १ = ०$ इसमें एक अव्यक्तमान -१ और ० के बीच का आसन्नमाना नयन से ले आओ ।

उ.—·२८४६३

२२ । $अ य^{३} + ३ क य^{२} + ३ ख य + ग = ०$ इसका रूप $र^{३} - खा = ०$ ऐसा बनाना है । उ. मान लो कि $र = अ_{०} + अ_{१} य + य^{२}$ फिर २३४ प्रक्रम की क्रिया करो ।

२३ । असंभवों का गुणन, भजन कैसे करते हो ।

२४ । सिद्ध करो कि यदि $न = \infty$ तो $^{न \;\; १}\left(न \;\; आ \right)_{२ \;\; ३}$ इसका कोई अङ्क $१, \infty$ यह होगा । २४७ प्रक्रम देखो ।

२५ । $य^{-५} - २ य^{-४} + ३ य^{-३} + ४ य^{-२} + ७य^{-१} + ५ = ०$ बताओ इसमें य के कितने विध मान आवेंगे उ. ० विध ।

२६ । यदि अ, क, ख, ग,......इत्यादि न संख्यायें हों तो सिद्ध करो कि $\frac{(य - क)(य - ख)}{(अ - क)(अ - ख)}$ इस तरह के जो न फल होंगे उनका योग एक के समान होगा ।

यहां $फ(य) = (य - अ)(य - क)(य - ख)$......मान लो और

$\frac{१}{फ(य)}$ इसका रूप खण्ड भिन्नों में लाकर फ (य) से गुण दो।

२७। एक समीकरण का जिसमें सर और व्यत्यास दोनों हैं कैसे ऐसा रूपान्तर करें जिसमें सब सर ही हो और दूसरा कैसा रूपान्तर करें जिसमें सब व्यत्यास ही हो।

(१) उ. धन प्रधान सीमा जान लो कि सी है तो फिर य=र+सी फिर ऐसा कल्पना कर समीकरण में उत्थापन दो तो र के फल स्वरूप में ऐसा समीकरण बनेगा जिसमें र का कोई धन मान न आवेगा; इसलिये अब इसमें सर ही होंगे।

(२) इसी प्रकार सब से छोटी धन प्रधान सीमा $सी_१$ हो तो य = र+$सी_१$ ऐसा मानने से र के रूप में जो समीकरण होगा उसमें र का कोई ऋण मान न होगा; इसलिये सब व्यत्यास ही होगा।

२८। यदि न घात समीकरण का अन्त पद व्यक्ताङ्क $प_न$ हो और न विषम संख्या और अव्यक्त मान सब गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि अव्यक्त का एक मान $\sqrt[न]{प_न}$ यह होगा

२९। सिद्ध करो कि $य^{२न} - पय^{२त} + ब = ०$ इसमें चार भिन्न-भिन्न संभाव्य अव्यक्त मान होंगे यदि $\left(\frac{प त}{न}\right)^{न} > \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{न-त}$

और यदि $\left(\frac{त प}{न}\right)^{न} = \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{न-त}$ तो उन चारो में दो दो तुल्य

होंगे और यदि $\left(\frac{त प}{न}\right)^{न} < \left(\frac{त ब}{न-त}\right)^{न-त}$ तो कोई संभव मान न होगा। प और ब संभाव्य धन संख्या हैं। उ. समीकरण को फ (य) कहो तो $फ'(य) = २ न य^{२न-१} - त प य^{२त-१}$ इसमें यदि $फ'(य) = ० $ तो $य=०$, वा $+\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{१}{२(न-त)}} = अ_२$ वा

$-\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{१}{२(न-त)}} = अ_१$

अब ७३ वें प्रक्रम से फ (य) में $-\infty, -अ_१, ०, अ_१, +\infty$ के उत्थापन से

$$फ(-\infty)+, फ(०)=+, फ(+\infty)=+$$

$$फ(अ_१)=फ(अ_२)=\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} - प\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{त}{न-त}} + ब$$

$$=\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} - \frac{न प}{त प}\left(\frac{न प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} + ब$$

$$=\left(\frac{त-न}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}} + ब = ब - \left(\frac{न-त}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}}$$

इसलिये यदि

$$ब < \left(\frac{न-त}{त}\right)\left(\frac{त प}{न}\right)^{\frac{न}{न-त}}$$

$$\text{वा} \left(\frac{\text{त ब}}{\text{न-त}}\right)^{\text{न}-\text{त}} < \left(\frac{\text{त प}}{\text{न}}\right)^{\frac{\text{न}}{\text{न}-\text{त}}} \text{ तो}$$

$$\text{फ}(\text{अ}_१) = \text{फ}(\text{अ}_२) = -\text{तब}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{फ}(-\infty), & \text{फ}(\text{अ}_१), & \text{फ}(०), & \text{फ}(\text{अ}_२), & \text{फ}(\infty) \\ + & - & + & - & \div \end{array}$$

इसलिये चार व्यत्यास होने से चार भिन्न भिन्न संभाव्य मान $-\infty$ और $\text{अ}_१$, $\text{अ}_१$ और ०, ० और $\text{अ}_२$, और $\text{अ}_२$ और ∞ के बीच में होंगे। और बातें प्रसिद्ध हैं।

३०। $\text{फ}(\text{य}) = \text{य}^४ + \text{प}_२\text{य}^२ + \text{प}_३\text{य} + \text{प}_४ = ०$ इस पर से एक ऐसा समीकरण बनाओ जिसमें अव्यक्त मान अ, $\frac{\text{म}}{\text{अ}}$, क, $\frac{\text{म}}{\text{क}}$ इस चाल के हों।

३१। वर्गमूल निकालने की युक्ति से दिखलाओ कि $\text{य}^४ + \text{प}_१\text{य}^३ + \text{प}_२\text{य}^२ + \text{प}_३\text{य} + \text{प}_४ = ०$ इसको एक वर्गसमीकरण के रूप में ला सकते हैं यदि $\text{प}_१^३ - ५\text{प}_१\text{प}_२ + ८\text{प}_३ = ०$ वा $(\text{प}_१^२ - ४\text{प}_२)\text{प}_४ + \text{प}^२ = ०$

३२। सिद्ध करो कि $\text{य}^४ + \frac{३}{२}\text{अ}\text{य}^२ + \text{क}\text{य} + \text{ख} = ०$ इसमें सब संभाव्य मान कभी नहीं होंगे यदि $\text{अ}^३ + \text{क}^२$ यह धन संख्या हो तो। (स्टर्म का सिद्धान्त लगाओ)

३३। $\text{य}^३ + \text{प}_१\text{य}^२ + \text{प}_२\text{य} + \text{प}_३ = ०$ इसमें यदि अव्यक्त मान अ, क, ख हों तो $\text{अ}^२\text{क} + \text{क}^२\text{ख} + \text{ख}^२\text{अ}$ इस अर्ध तद्रूप फल का मान बताओ।

उ. यदि $अ^2क + क^2अ + ख^2अ = सा$ तो

$$\frac{सा}{(अकख)^2} = \frac{सा}{प_3^2} = \frac{1}{ख^2क} + \frac{1}{क^2अ} + \frac{1}{अ^2ख}$$ और 162—

163 वें प्रक्रम से

$$\frac{3प_3 - प_1प_2}{प_3^2} = \frac{1}{अ^2क} + \frac{1}{क^2अ} + \frac{1}{क^2ख}$$

$$\frac{1}{ख^2क} + \frac{1}{ख^2अ} + \frac{1}{अ^2ख}$$

दोनों के अन्तर से

$$\frac{(3प_3 - प_1प_2) - सा}{प_3^2} = \frac{1}{अ^2क} + \frac{1}{क^2ख} + \frac{1}{ख^2अ}$$

और $सा = अ^2क + क^2ख + ख^2अ$

दोनों के गुणन से

$$\frac{(3प_3 - प_1प_2)सा - सा^2}{प_3^2} = 3 - \frac{अ^3 + क^3 + ख^3}{प_3}$$

$$- प_3\left(\frac{1}{अ^3} + \frac{1}{क^3} + \frac{1}{ख^3}\right)$$

$$= \frac{9प_3^2 + प_1^3प_3 + प_2^3 - 6प_1प_2प_3}{प_3^2}$$ छेद को उड़ा देने से

और पक्षान्तरानयन से

$सा^2 - सा(3प_3 - प_1प_2) = 6प_1प_2प_3 - (9प_3^2 + प_1^3प_3$
$+ प_2^3)$ यह वर्गसमीकरण हो जायगा।

३४। $य - ६ य^{२} + ११ य^{२} - ६ = ०$ इसमें यदि अव्यक्तमान अ, क और ख हों तो $अ^{२} क + क^{२} ख + ख^{२} अ$ इस का मान बताओ। उ० २३ वा २५।

३५। ऊपर के समीकरण में सिद्ध करो कि यों $अ^{२} क = ४८$

३६। सिद्ध करो कि फ (य) यह यदि य का अकरणीगत घन फल हो तो फ (य) = ०, और फ′ (य) = ० इन दोनों में से एक समीकरण में अवश्य एक अव्यक्त मान संभाव्य संख्या होगा।

उ० मान लो कि $फ (य) = य^{न} + प_{१} य^{न-१} + प_{२} य^{न-२} + प$ तो यदि न विषम होगा तो २३ वें प्रक्रम से कम से कम फ (य) = ० इस में एक संभाव्य मान होगा और यदि फ (य) में न विषम न हो तो फ′ (य) मे न − १ यह विषम होगा; इसलिये तब फ′ (य) = ० में २३ वें प्रक्रम से एक संभाव्य मान होगा।

३७। यदि $फ (य) = य^{न} - १$ और फ′(य) = ० इसमे अव्यक्त मान अ, क, ख, ··· हों तो दिखलाओ कि

$$\frac{नय^{न-१}}{य^{न} - १} = \frac{१}{य - अ} + \frac{१}{य - क} + \frac{१}{य - ख} + \cdots\cdots$$

३८। उन दो राशियों को बताओ जिनके घात में छोटी राशि को जोड़ कर आधा करने से उसका पूरा पूरा घन मूल मिल जाता है। दोनों राशियों के योग और अन्तर में दो दो जोड़ दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल मिल जाता है। राशियों के वर्गान्तर में आठ जोड़ दें तो इस का भी पूरा वर्गमूल

मिलता है, राशियों के वर्गयेाग का भी पूरा वर्गमूल मिलता है और इन पांचों मूलों का येाग २५ होता है।

उ० ६ और ८

३६। उन दोनों राशियों के बताओ जिनके येाग और वियेाग में तीन मिला दें तो उनका पूरा पूरा वर्गमूल निकल आता है। देानों के वर्ग योग में चार घटा दें तो उसका पूरा वर्गमूल मिल जाता है। देानों के वर्गान्तर में बारह जोड़ दें तो उसका भी पूरा वर्गमूल मिलता है। देानों के घात के आधे में छोटी राशि का मिला दें तो उसका पूरा घनमूल मिलता है और पांचेा मूलों का येाग २३ होता है।

उ० ६ और ७

४०। उन देानों राशियों का बताओ जिनके येाग और अन्तर का पूरा पूरा वर्गमूल निकले, वर्गान्तर का भी पूरा वर्गमूल मिले, वर्ग येाग का आठ मिलाने से पूरा वर्गमूल मिले, देानों के घात में छोटी राशि का घटा कर आधा करें तो इसका घनमूल मिले और पांचों मूलों का येाग १६ हो।

उ० ४ और ५

४१। वे देानों अभिन्न राशि कौन हैं जिनके येाग में उनके घात और वर्गयेाग का मिला कर वर्गमूल लें उस में उन्हीं देानों राशियों का मिला दें तो २३ हेा।

उ० ७ और ५

४२। दश हाथ व्यासार्ध के वृत्तक्षेत्र की परिधि पर एक खूँटे में एक रस्सी से एक घोड़ा बँधा है और ठीक आधे खेत

की घास को चरता है। बताओ जिस रस्सी में घोड़ा बँधा है उसकी लम्बाई कितना हाथ है।

उ० ११·५८७·८५

४३। ऊपर के प्रश्न में जिस खूँटे में घोड़ा बँधा है उस से छ राशि के अन्तर पर परिधि ही के ऊपर एक दूसरा खूँटा है जिसमें एक गाय रस्सी से बँधी है वह भी ठीक आधे खेत की घास चरती है। बताओ दोनों के चरने से कितना खेत बाकी बचा।

उ. २५-४५५ वर्ग हस्त।

यह बीज बीज विचारि जो उर धारि हैं धरि धीरता।
वर वासना विधि वारि डारि निकारि अङ्कुर धीलता॥
निज सुमन सों बहु सुमन पाय सो धीर यश धन धी लहै।
राखत नरेश सुचाहि तेहि भाखत सुधाकर धीर है॥
उनइस सै अरु चौवन संवत मास।
सित शुचि दूइज गुरु दिन भयेउ प्रकास॥
तेहि संवत सित कातिक दशमी गुरु दिन।
पूरन कियेउ सुमिरि सिय-पति-पद छिन छिन॥

इति श्रीकृपालुदत्तात्मजसुधाकरद्विवेदिकृता
समीकरण-मीमांसा सम्पूर्णा।

विषयानुक्रमणिका

प्रथम भाग

अध्याय १

अध्याय २

अध्याय ३

अध्याय ४

अध्याय ५

अध्याय ६

अध्याय ७

अध्याय ८

अध्याय ९

अध्याय १४

अध्याय १५

दूसरा भाग

अध्याय १६

अध्याय १७

शब्द-सूची

अ

अव्यक्तराशि, Unknown quantity
अकरणीगत, Rational
अभिन्न, Integral
अकरणीगत अभिन्नफल, Rational integral function.
अपचय घात, Descending power
अंश, Numerator.
असंभव संख्या, Imposible or imaginary number
अन्तिमपद, Last term
असंभव मूल, Imaginary root
अनन्त, Infinity
अधूरा समीकरण, Incomplete equation
असकृत्कर्म, Repeated process
असमान, Unequal
अटकल से, By trial
अपवर्त्तित-घन-समीकरण, Cubic equation by reduction
अनुमान, Corollary
अव्यवहित, Contiguous or adjacent
अव्यवहितोत्तर, Contiguous, different
अव्यवहित पूर्व और उत्तर य के मान, Former and later adjacent values of x.
अपवर्त्तन, Reduction
अङ्कपाश, Permutation

अनुगम, Deduction
अचल स्पर्धी Invariant
अक्ष, Axis
अपवर्त्य, Multiple

आ

आसन्नमान, Aproximate value
आनयन, Solution
आयताकृति, Rectangular form
आयताकार, Rectangular
आयत, Rectangle

इ

इष्टाङ्क, Arbitrary number

उ

उत्पन्न फल, Derived function
उपचय, Ascending
उभयनिष्ठ, Common
उन्मिति, value
उपपत्ति, Proof
उत्थापन, substitution
ऊर्ध्वाधर, vertical
उपान्तिम, Last but one
ऊर्ध्वाधर पंक्ति, vertical line, column
उत्क्रम, Reciprocal

ऋ

ऋण, Negative

ए

एकवर्ण समीकरण, Equation with one variable
एकापचित, Decreasing by one
एकान्तर, alternate

क

करणी, Surds
करणीगत मूल, Irrational root
क्रमिक पदयूथ, group of terms in order
कनिष्ठ सीमा, Inferior limit
कोष्ठक, Bracket
कोटिज्या वा कोज्य, cosine
कर्ण, Hypotenuse
कोटि, altitude
कनिष्ठफल, Determinants
कर्णगत, situated diagonally
केन्द्र, center

ख

खिल, Wrong

ग

गुणक, Multiplier, coefficient
गुण्य, Multiplicand

गुणन-फल, Product
गुणयगुणक रूप अवयव वा खण्ड, Factors
गुणोत्तर श्रेढी, Geometrical progression
ग्राह्यमान, admissible value

घ

घन, Cube
घन-समीकरण, Cubic equation
घात, Power

च

चिन्ह, Sign
चिन्ह रीति, Rules of signs
चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation
चलनकलन, Differential Calculus
चलराशिकलन, Integral Calculus
चलन समीकरण, Differential equation
चक्रवाल, Cyclical
चलस्पर्धी, Covariant
चापीय, Spherical
चाप, Arc.

छ

छेदगम से, By multiplying both sides of an equatoin by the greatest denominator.

ज

ज्या, sine

त

तृतीयोत्पन्नफल, Third derived function
तुल्य मूल, Equal roots
तुल्यान्तरित, Equidistant
तद्रूपफल, Symmetrical function
तष्ट करना, To divide numerator by a denominator and take the remainder only
तात्कालिक संबन्ध, Differential co-efficient
तिर्यक् पंक्ति, Rows, Horizontal line
तद्रूप, Symmetrical
तुल्यघात, Homogenous
त्रिकोणमिति, Trigonometry

द

द्वितीयोत्पन्न फल, Second derived function
द्वियुक्पदसिद्धान्त, Binominal Theorem
द्वियुक्पद समीकरण Binominal equation
दृढ़, Prime
दशमलव, Decimal
द्वितीयपदरहित चतुर्घात समीकरण, Biquadratic equation deprived of its second term
दीर्घवृत्तलक्षण, Ellipse

ध

धन, Positive
धनर्ण, Positive and negative

घ्रुवशक्तिक, Having the sum of the exponents of each term equal

घ्रुवशक्ति, Sum of the exponents

घ्रुवा, Constituents of the determinants

घ्रुवाङ्क, Constituent

घ्रुव, Constituents

घ्रुवक, Constituent

धरातल, Plane

न

निर्दिष्ट, Given

न्यून, Less

निरवयव, Without remainder, perfect

निष्पत्ति, Ratio

निरत्न, non-contituent

न्यूनतम, Minimum

प

प्रक्रम, Article

पूर्ण-फल, Complete function

पूर्ण-समीकरण, Complete equation

प्रथमोत्पन्नफल, First derived function

पक्ष, side

पद, term

प्रधान सीमा, Superior limit

परिच्छिन्न मूल, Commensurable root
पाटीगणित, Arithmetic
पद उड़ाना, Removal of a term
प्रसिद्धार्थ, Postulate
पंक्ति, Line
प्रधान पद, First element
पूरक, Complementary
परम्परा, Continuous arrangement, regular series
प्रत्युत्पन्न, Derivative
परिमिति, Limit
प्रधान समीकरण, Final equation
प्रकीर्णक, Miscellaneous Theorem
परिधि, Circumference
पूर्णज्या, Chord

फ

फल, Function, result

ब

बीजगणित, Algebra

भ

भाज्य, Dividend
भाजक, Divisor
भिन्न, fraction
भुज, Side or base if a triangle

म

मूल, Root
महत्तमापवर्त्तन, G. C. M.

मूलचिन्हान्तर्गत, Under radical sign

of

मुख्य समीकरण, Original equation
मध्यस्थ, Medium
मिश्र-चल, Complex variable
महत्तम, Maximum

य

योगान्तर श्रेढी, Arithmetical progression
यूथ, Group

र

रूप, Unity

ल

लब्धि, Quotient
लघुत्तमापवर्त्य, L. C. M.
लघूकरण, Reduction
लघुरिक्थ, Logarithm
लघुकनिष्ठफल, Partial or minor determinant
लुप्तीकरण, Elimination
लम्ब, Perpendicular

व

विषम, Odd
व्यत्यास, Change
बहुयुक्पद, Polynominal term
वर्गसमीकरण, Quadratic equation
वितत रूप, continued form
विततभिन्न, Continued fraction

व्यतिरेक, Converse
व्याप्ति, Inherence
व्यत्यय, Reverse
विरुद्ध, Opposite
वास्तवमान, Real value
वज्राभ्यास, Cross multiplication
वक्र, Curve
वृत्त, Circle

श

शेष, Remainder
श्रेणी, Series
श्रेढी, Progression

स

समीकरण मीमांसा Theory of Equations
सरूप समीकरण, Linear equation
संख्यात्मक गुणक, Numerical co-efficient
सिद्धान्त, Theorem
सम्भाव्य संख्या, Real number
सम्भव संख्या, Real quantity
समीकरण, Equation
स्वतन्त्र, Independent
सम घात Even power
सर, Continuation
संशयात्मक, Ambiguous
सीमा, Limit

समच्छेद, Equal denominators
समकोण, Right angle
स्वल्पान्तरसे, Roughly
समीकरण के मूलों का पृथक्करण, Separation of the roots of an equation
सम, Even, equal
संख्यात्मक मान, Numerical value
समशोधन से, By equal subtraction
सोपान, The highest exponent
सङ्कलन, Addition
सजातीय, similar, Homogenous
सम्बद्ध, conjugate
समानान्तर, Parallel
सीमा, Boundary

ह

हर, denominator
हरात्मक समीकरण, Harmonical equation

क्ष

क्षेत्रफल, Area of a figure
क्षेत्र, Figure
क्षेत्र, Additive

त्र

त्रिघात समीकरण, Cubic equation
त्रिकोणमिति, Trigo-nometry